À Françoise,
son courage, son esprit vif et sa patience

L'image de la couverture est
l'œuvre de Renée Othot, juin 2000.

Why struggle to PROOVE it when
you can easily PLOUFFE it?

Pourquoi s'efforcer de le Prouver
quand on peut facilement le Plouffer ?
Graeme Reeves

Préface

C'est une histoire de nombres, de chiffres, des tonnes de chiffres. Je dis souvent ça à des gens qui sont surpris de me voir donner le total de la facture dans un magasin, ne vous inquiétez pas, je suis tombé dans les chiffres quand j'étais petit. Ou encore de défiler des décimales en classe quand on parle de π ou de $\sqrt{2}$. Il m'arrive de les écrire au tableau, les 200 premières encore, je m'en souviens un peu. Une fois un prof à l'IUT m'a dit, tu sais Simon tes décimales de π c'est contagieux, ils sont maintenant plusieurs à les apprendre par cœur. J'en ai surpris un une fois qui avait les yeux

collés au plafond et qui semblait plongé dans une transse bizarre, je lui demande mais que faites-vous? Il me répond, j'apprends des décimales de π, j'en suis à 100.

À l'époque en 1975 j'en connaissais 4096, assez pour établir un record du monde qui a tenu 2 ans et lancé la mode des décimales. Pas que je sois l'instigateur de cette lubie, d'autres mathématiciens et même des physiciens célèbres s'y sont mis. Richard Feynman le fameux physicien en connaissait 762 exactement. À ce point dans le développement décimal de π il y a 999999, il s'amusait à dire oui et après la 762$^{\text{ième}}$ c'est que des 9, tellement que ce point particulier porte le nom de point de Feynman. Il avait raison puisque 24 décimales de π sont bien suffisantes pour toutes les applications pratiques et même pour la NASA. Mais alors, pourquoi calculer autant de décimales de ce nombre au juste? C'est une bonne question. La réponse à donner dépend de celui qui la pose. La vraie réponse pour moi est bien trop compliquée à expliquer à quelqu'un qui ne voit pas dans quel univers nous vivons. La vraie réponse est plus profonde en fait, elle a débuté avec Pythagore il y a 2500 ans. Pour Pythagore la nature même de 'tout' est nombre et quand ils sont tombés (l'école de Pythagore) sur le premier nombre irrationnel qui est $\sqrt{2}$, ça été un choc, un schisme. Comment est-ce possible qu'un carré de

côté 1 puisse avoir une diagonale qui ne soit pas un nombre entier ou rationnel? On s'est donc intéressé aux nombres il y a bien longtemps et aujourd'hui l'histoire est loin d'être terminée parce qu'on commence à comprendre. Ce schisme de Pythagore avec $\sqrt{2}$ est le même qui a été trouvé pour des atomes et des particules au cœur même de la matière. Ces constantes mathématiques sont en fait très importantes. Une en particulier a été identifiée par un certain Broadhurst dans un racoin de l'électron. Le 3ème moment magnétique de l'électron est une valeur sans dimensions. Sans dimensions ça veut dire que c'est un nombre pur, qui ne dépend pas d'unités physiques terrestres ou humaines. Sa valeur est $Li_4(1/2)$, c'est 0,51747906167… et ce même électron en a aussi d'autres de même nature. De vraies constantes mathématiques pures au cœur même du tissu de cet univers où on vit? Moi j'en suis convaincu depuis pas mal d'années.

Donc, cette réponse à donner à quelqu'un qui demande, mais ça sert à quoi tes calculs? Maintenant je dis plutôt, en fait vous avez combien de temps devant vous, je vais vous expliquer. Bienvenue sur la Mer des Nombres Réels.

Note : l'emploi du terme mathématicien est au masculin dans ce livre pour des raisons de simplicité de rédaction. Les femmes en mathématiques sont certainement aussi bonnes que les hommes et souvent bien plus humbles.

Note 2 : le livre comporte le moins de formules possibles. Le lecteur ou lectrice non mathématicien (cienne) peut sauter ces formules elles n'apparaissent que pour appuyer un argument. Pour ceux ou celles qui veulent en savoir davantage, l'ensemble de mes articles se trouve ici : http ://plouffe.fr/articles/ et http://plouffe.fr/simon/Citations/

Note 3 : il y a un vieux dicton dans le monde de l'édition qui dit "À chaque formule qu'on ajoute dans un texte, 50 % des lecteurs décrochent". Donc si j'écris un bouquin avec 50 formules dedans, il restera probablement 1 lecteur intéressé par ce livre à la fin. Alors bon courage.

Chapitre 1

Le moulin rouge

St-Jovite, un village de 2000 habitants dans les Laurentides au Québec, mes parents s'y étaient installés en 1949 dans un vieux moulin.

Le moulin vers 1950

Ils étaient tisserands, ma mère surtout opérait le commerce de rideaux, couvre-lits, tout ce qui peut se tisser. C'était ce qu'on appelle une *cottage industry*, les employés étaient des femmes surtout qui tissaient sur leur métier Leclerc (très populaire à l'époque), fait de bois très dur. Ce petit

commerce marchait bien puisque la région de St-Jovite accueillait une course automobile et la station de ski du Mont-Tremblant était très courue. Ça amenait un tas de touristes américains.

Mes parents en 1950 à peu près. C'est devant la maison.

Donc, chemin faisant, mes parents eurent de nombreux enfants : 8 en tout, moi je suis le 5ème. Forcément il fallait agrandir la maison, ce qu'ils firent rapidement.

Le moulin agrandi vers 1954

Vue aérienne (1990)

Le moulin en 1954

Vers 1965, ils décident non seulement d'agrandir la maison mais aussi d'y installer une piscine intérieure. Ma mère disait que ça nous occuperait, ce fut le cas, on y passait pas mal de temps, hiver comme été, puisque la pièce était chauffée aussi avec une énorme cheminée, on se mettait devant pour se sécher après avoir fait une saucette dans l'eau.

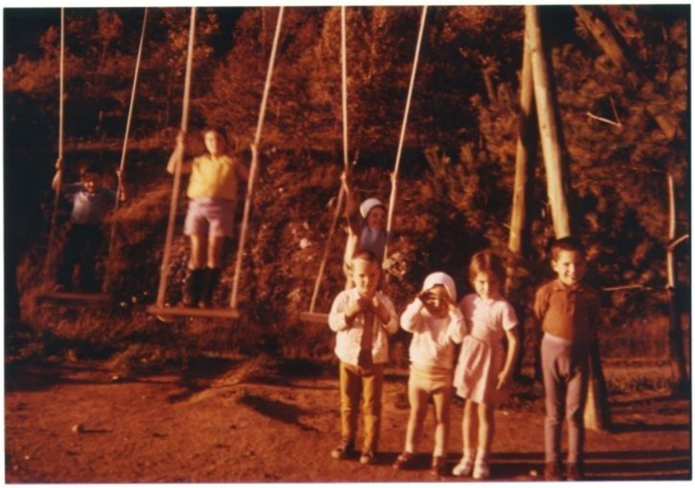
Notre jeu favori mis à part la piscine était de jouer à la cachette (cache-cache), il arrivait souvent de ne pas se trouver, la quantité de racoins dans cette maison avait de quoi décourager les recherches, plus de 600 mètres carrés. Quand on n'était pas en train de tremper dans la piscine on allait au ski, on pouvait y aller directement en mettant les skis sur la galerie, descendre les marches de l'escalier en ski et en

route pour la montagne. L'été c'était le ruisseau à côté de la maison ou la montagne, la forêt tout autour. Cet endroit était un paradis. On se faisait des sandwiches aux tomates et c'était le pique-nique dans la montagne surmontée d'une croix comme sur le Mont Royal à Montréal, on pouvait y contempler le village et la maison bien sûr. Quelques-unes de ces photos ont été trouvées sur le site officiel de la bibliothèque nationale du Québec, en fouillant les archives.
Tout était original dans cette maison, le commerce que mes parents avaient créé occupait une vingtaine de familles autour du village. Elles étaient toutes équipées d'un métier à tisser. Il y avait madame et monsieur Perrault de Brébeuf qui faisaient les tapis tressés en laine, madame Gauthier qui faisait la couture et le tissage, titi ou Mercédes de Saint-Jovite Station (à 2-3 km du village) s'occupait de la couture des rideaux tissés. Tout était tissé ou tressé dans la maison, dans la cave énorme il y avait la salle des tapis, la salle des bobines de fil, l'ourdissoir ou ma mère passait des heures à tresser des écheveaux de fils pour les métiers. C'est là que j'ai failli perdre un pouce en me mettant les doigts dans la poulie du moteur. Je ne me souviens même pas de cet épisode.

La maison avait 4 niveaux, la cave qui couvrait tout le sous-sol contenait la chambre des tapis, le

cabanon, la salle des fils là où étaient entreposés les cônes et bobines de fil en coton et laine qui servaient à fabriquer les tentures ou rideaux. Enfin le garage qui servait surtout à teindre la laine pour les tapis.
Au-dessus, le magasin et le reste de la maison jusqu'à la chambre aux étoiles. On avait donné des noms aux pièces. La chambre aux étoiles était la petite pièce là ou Maria, l'ainée, avait sa chambre à côté de la roue, c'était une vraie roue de moulin qui tournait avec le vent. On la faisait tourner à la main pour s'amuser.

L'étage principal était coupé du magasin par un grand rideau qui donnait sur la cuisine. C'est à cet endroit à peu près qu'était le rail de chemin de fer qui servait de poutre de soutien pour tout ce bois, toute la maison était en bois. Le mélange du commerce et de la maison était étrange parfois, une fois un client perdu (?) s'est pointé dans la cuisine et a lancé un dix cents sur le comptoir et a demandé un café. On lui a expliqué que ce n'était pas un restaurant et qu'il était dans la cuisine de la maison.



Devant les balançoires, avant la construction de la piscine intérieure il y avait la piscine extérieure en forme de bol à soupe. En ordre, Domino, Jacinthe, Lucie, Nicolas, Loulou, Sonia et moi

La maison en hiver, on aperçoit la chambre de mes parents. Cette forme un peu spéciale, l’unique pièce très haute avec cette fenêtre en vitrail. À l’arrière on voit la chambre aux étoiles, c’était la chambre de Maria, l’ainée de la famille elle y avait installé ses quartiers généraux.

La famille au complet et 2 amis.

WOMEN — The Montreal Star — CHURCHES

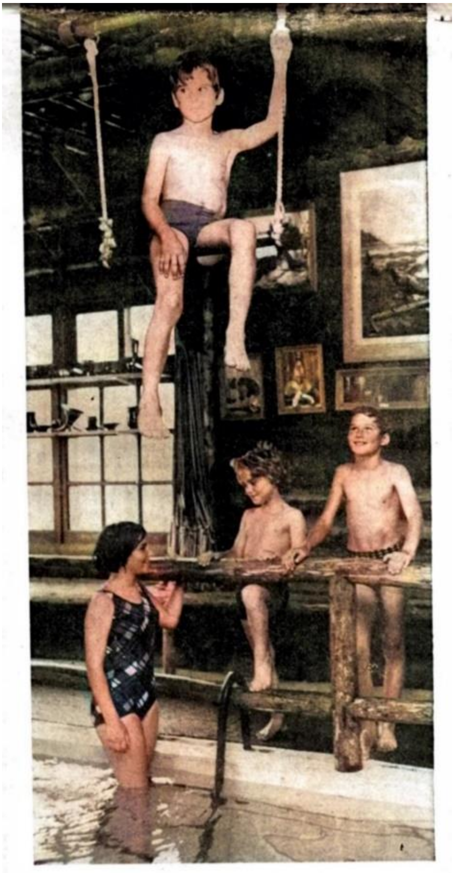
Section Five — SATURDAY, AUGUST 27, 1966

Story by Eleanor Callaghan — Photos by John Duggett

Non-fictional Plouffes Full of Vim

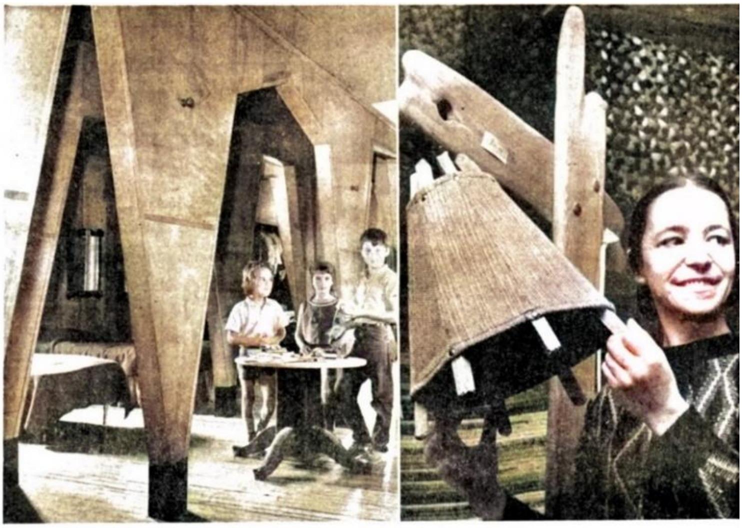
Article du *Montreal Star* du 27 aout 1966

Mes parents et notre chien Lassie



Four of the eight Plouffe children enjoy a noonday swim in the living room pool.

Moi sur le trapèze avec Lucie, Nicolas et Domino.



A game with construction blocks is played in the boys' sleeping qu arters. At right, Mrs. Plouffe examines a hand-woven lampshade.

Extrait du Montreal Star, 27 aout 1966

Sur le métier à tisser, années 70 à la boutique sur la rue St-Paul dans le vieux-Montréal

À la maison on ne s'ennuyait jamais. Cette piscine, on y passait nos journées, accrochés aux trapèzes et échelles autour de la piscine, balançoires à l'intérieur. C'était quand même assez grand comme pièce. Mes parents y organisaient des boites à chansons le samedi et le tour de la piscine avait des bancs ou les spectateurs s'assoyaient. Ça attirait beaucoup de clientèle, le commerce de mes parents était connu à l'époque. Un journal de Montréal, le *Montreal Star* avait fait un article sur la maison, le commerce et mes parents. Ça accrochait puisqu'on s'appelait Plouffe et la famille Plouffe (le programme télé et le roman de Roger Lemelin) avait été très populaire au Québec et même ailleurs dans le monde.

La télévision nationale (Radio-Canada) était venue à la maison pour une interview de ma mère. On avait eu un encart complet dans La Presse la même année. Une fois les équipes de télévision étaient venus à la maison avec 4 gros camions pour filmer un téléroman. La maison servant de décor pour l'émission. Ils ont envahi la maison de caméras, fils, chariots, gros fauteuils pivotants pour le maquillage, équipes techniques pendant tout un week-end pour aboutir avec même pas 2 minutes de film. Il y avait même eu quelqu'un en habit de plongée dans la piscine pour filmer le cascadeur (une femme) qui a plongé dans l'eau, ils voulaient la filmer dans l'eau. L'eau de la piscine étant trop froide pour l'actrice et aussi devant le danger d'un accident j'imagine. Ça nous avait fait bien rigoler. La scène durait 5 secondes et ça a pris la journée à filmer, les acteurs

étaient très mauvais. Je me rappelle que l'acteur principal avait 1 phrase à dire et il a repris ça je ne sais plus combien de fois. Ce téléroman (Rue des Pignons) était populaire au Québec à cette époque, je crois même que c'était le plus populaire, en plus c'est mon oncle Pierre Brabant qui était pianiste de concert qui a composé la musique de l'émission, il venait de temps en temps à la maison et nous jouait du piano. On devait être 5 sur les 8 enfants qui en jouaient, moi y compris. Ma mère elle, avait acheté un orgue Hammond je crois et en jouait des fois, en plus de suivre des cours de mathématiques par correspondance. Ma grande sœur Maria jouait plutôt de la guitare. La musique était importante à la maison, on écoutait un peu de tout. Ça m'a laissé un très fort souvenir toutes ces musiques. Brassens, Bécaud, Michel Legrand, les Swingle Singers, mon père lui n'écoutait que du classique et avait en horreur les disques 'yé-yé' de ma sœur Maria, mais bon ce n'était pas méchant. Pour moi cette enfance très heureuse était, maintenant que je suis plus vieux, une idée du paradis sur terre. À l'école je ne me rappelle pas avoir eu moins que 95 sur 100 dans mes bulletins mais c'est l'arithmétique qui était ce que je préférais. On m'a fait sauter la 5ème année, je suis passé de la 4ème à la 6ème. Au Québec les années sont comptées comme les étages. Le primaire est de 1 à 7, le secondaire est de I à V, ensuite le Cégep qui dure 2 ans serait équivalent des classes préparatoires en France, ensuite c'est l'université. Ma mère m'a souvent dit ça : quand tu avais 2 ans tu ne disais rien du tout, tu étais autiste, mon grand-père disait, il est en train de penser. J'ai eu une

méningite assez sévère à 5 ans et je suis à peu près normal maintenant mais j'aurais pu y rester. Ma sœur Jacinthe m'appelait le curé parce que je marchais souvent à réfléchir autour de la piscine, une fois vers 10 ans après mures réflexions j'ai dit à ma mère : *Tout ce qui est logique est possible* tout en ayant aucune idée comment j'avais pu arriver à cette conclusion.

J'avais une tendance vers les chiffres, je me rappelle à 8 ans avoir écrit à la main les nombres de 1 à 1001 juste pour voir. À l'école élémentaire je n'aimais que les après-midis où on faisait des séances de calcul arithmétique, additions, multiplications, divisions. Je connaissais par cœur la table des multiplications bien sûr.

Mais en fait, c'est un peu plus que ça. Vers 10 ans, je reçus en cadeau des LEGO. Mais avant d'avoir ces LEGO j'avais des petits rouleaux et des cônes en carton que mes parents me donnaient pour m'occuper, j'en faisais des maisons. D'autres cartons venaient de mon grand-père, c'était les restes de coupe de son imprimerie à Montréal.

Avec ces LEGO, ce qui m'amusait pendant des heures était de construire une tour plus haute que moi. Je voulais être architecte dans la vie. La grande cave à la maison était remplie de bobines de fil de toutes les couleurs, forcément mes parents avaient le commerce de rideaux, tapis, etc. C'était le stock. Je m'étais inventé un jeu de téléphérique avec les LEGO, je mettais des fils partout, dans la maison, dehors. Je couvrais le stationnement de fils tendus qui partaient dans tous les

sens. Pour faire quoi ? Je ne le sais même pas, mais de tirer des droites dans l'espace avec ces fils me fascinait même si l'utilisation du téléphérique en Lego ne fonctionnait pas sur de grandes distances.

J'encombrais de mes constructions le parking, tellement que les clients du magasin devaient faire des acrobaties pour contourner mes fils, n'osant pas démolir mon œuvre. J'avais peu accès aux livres, on avait les National Geographic que mon parrain apportait et que mon père lisait en anglais et le Larousse avec les quelques images et c'est tout. Ce n'est qu'en 1968 que je reçus les TIME-LIFE en science sur les mathématiques, la physique. Ces livres étaient bien faits, je les avais tous lus. Déjà mon héros était évidemment Einstein. Pour moi l'idée d'infini m'est apparue évidente lorsque je vis la mer pour la première fois en 1964, on était allé en Virginie et arrivé sur le bord de la mer j'ai pu la voir pour la voir jusqu'à ce qu'une fin de vague vienne à mes pieds. Ça m'a fait un choc de voir cette immensité.

J'avais quelques souvenirs de mon père après que la famille ait déménagé à Montréal, les enfants l'emmerdaient. Quand on était très jeunes, il bricolait dans la maison tout le temps, muni du marteau et moi je lui posais constamment des questions, toujours des questions au point qu'il finissait par dire « tu m'emmerdes! » C'est lui qui avait les finitions en bois, ma mère était plutôt très occupée avec le commerce 'les artisanes enrg'. Elle passait son temps à s'occuper de la production des rideaux, je dis rideaux mais nous on

appelait ça tentures. On avait plusieurs métiers à tisser dans la maison, toutes les artisanes, c'était surtout des femmes, en avaient un ou plusieurs et elles tissaient. Je me rappelle que ma mère se faisait un honneur et devoir de bien les payer. Ce n'était pas une fortune mais elles étaient très heureuses de se faire un bon revenu en tissant à la maison. Il devait y avoir une vingtaine de personnes qui travaillaient dans le village et les alentours. À la maison mes parents, tissaient aussi quand ils avaient le temps des carpettes. Ces carpettes étroites et très longues étaient vendues à la verge (36 pouces). Avec les nombreux touristes américains mes parents parlaient tout le temps en anglais, c'est comme ça que j'appris l'anglais en fait. Ces touristes américains étaient un peu exotiques pour nous, moi je m'amusais à ramper par terre l'air de rien et leur attachait les lacets des souliers ensemble.

Mes parents se divorcèrent en 1968 et la famille, toute la famille ou presque a déménagé à Montréal (Ile des Sœurs), le moulin a finalement été vendu plusieurs années après par mon père qui je crois l'a cédé pour une bouchée de pain. La bâtisse a été repeinte et comme c'était déjà rouge, ils en ont remis une couche. C'était devenu une discothèque, Le Moulin Rouge, mais qui n'a rien à voir avec celui de Paris. J'y suis allé une fois pour voir la maison, ce qu'elle était devenue. Ça fait bizarre de voir une machine à billets installée dans la cuisine. La piscine recouverte et transformée en piste de danse.

À Montréal j'allais à l'école secondaire en autobus, ça été un choc, mes notes qui frisaient le 100% sont tombées à 50%, je ne comprenais rien, on m'avait donné un horaire informatisé sur une feuille et je ne comprenais même pas l'horaire. Je me rappelle mon que mon professeur de comptabilité me disait 'es-tu bouché Plouffe ?' Je ne voyais pas l'utilité de l'actif et du passif, pas du tout.

C'est là que j'ai commencé à étudier la physique moi-même, je lisais les encyclopédies Universalis et Britannica. Je passais mon temps à la bibliothèque de Ville Mont-Royal pas trop loin de la maison, on devait s'y rendre en autobus mais de prendre ce bus à chaque fois était pour moi un pèlerinage. Une fois entré, j'y restais toute la journée le samedi. J'y allais tellement que j'ai fini par ne plus aller à l'école, à l'école de toute façon je n'allais pas au cours, j'avais décidé que les cours ne me servaient à rien, que j'apprenais bien plus de choses dans le Grand Larousse Encyclopédique ou Universalis, je lisais ce que je veux et surtout commençais à faire des calculs. C'est à ce moment que j'ai commencé à vraiment aimer la musique classique et découvert Bach et Telemann, j'avais lu que Telemann était un autodidacte et bien sûr Bach, avec les concertos brandebourgeois que j'écoutais en boucle. Mais c'était Telemann mon préféré, cette musique me mettait dans un état second, cet effet est le même aujourd'hui à chaque fois que j'en écoute.

J'ai fini par abandonner complètement l'école à 16-17 ans. Le directeur de l'école ayant abandonné l'idée

de me forcer à assister aux cours surtout qu'en fait muni de ma calculatrice et d'une table de logarithmes je pouvais calculer n'importe quoi, j'avais aussi quelques règles à calcul classiques mais à 2 décimales elles n'avaient que peu d'intérêt. Cette table de logarithmes je l'ai encore, toute barbouillée, c'est mon premier livre de mathématiques en fait. Je me demandais, mais comment ferait-on pour calculer en colonne les chiffres qui apparaissaient en ligne ?

Chapitre 2

La calculatrice

11 juin 1971, j'ai 15 ans. Je reçois en cadeau un appareil photo, le Praktika Nova IB. Mais à quoi ça sert un machin comme ça? Ah oui, prendre des photos mais il faut les faire développer, ça m'ennuyait terriblement. Mon parrain Maurice Dury venait de s'acheter une calculatrice électronique, une Bowmar 4 opérations à 8 décimales. On convient de faire l'échange même si l'appareil photo valait bien plus. C'est le coup de foudre instantané.

La Bowmar 905, 4 opérations

Je me rappelle avoir acheté plusieurs machines à calculer mécaniques et électromécaniques peu après, je voulais comprendre comme ça calcule. J'avais réussi à les démonter mais la compréhension du mécanisme m'échappait complètement.

Muni de cette calculatrice je me mis à calculer les inverses des nombres premiers. Je voulais briser la barrière de l'affichage limité à 8 chiffres. J'avais trouvé une façon de calculer les autres chiffres qui suivaient. Sachant faire la longue division à la main j'ai simplement adapté ce que je savais pour la calculatrice. Je m'étais fait une table, ça devait être en 1972-73. Donc, 1/7 = 0,142857… avait 6 chiffres dans sa période. 1/19 lui avait 18 chiffres, 1/17 avait 16 chiffres mais 1/13 n'avait lui que 6 chiffres. En cherchant à la bibliothèque du collège (le collège Saint-Viateur) j'avais trouvé les fameux 'Que sais-je' c'était une collection des petits livres sur tous les sujets, il y en avait un sur la théorie des nombres qui expliquait ce phénomène. Expliquer voulait dire pour moi que quelques parts j'avais compris qu'en base 10 l'inverse des premiers est soit $p-1$ ou un sous-multiple de $p-1$. Par exemple 1/37 a 3 chiffres (0,027027027…) dans sa période et 3 divise 36 qui est $p-1$. Mais ce qui me turlupinait était pourquoi certains premiers ont une période de $p-1$ alors que d'autres en ont moins. Je m'aperçus que ce phénomène est indépendant de la base, si on calcule en base 2 les périodes sont différents mais tout aussi mystérieuses. À ce que sache ce problème est un problème non-résolu des mathématiques.

En 1974, j'essayais de comprendre pourquoi les décimales de 1/17 sont prévisibles et pourquoi celles de π ne le sont pas. Prévisible voulant dire qu'on pouvait calculer à l'avance. En fait 1/17 = 0,0588235294117647… et ça se répète indéfiniment.

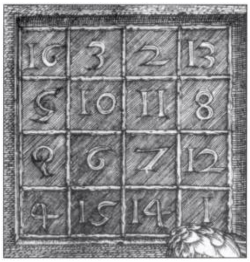
Mais à chaque décimale obtenue on obtient le résidu de la longue division de 1/17 oui car c'est 1,000000000… qu'on divise par 17. Ou plus mathématiquement le résidu de 10^n modulo 17, c'est le reste de la division par 17. Donc on a 1,10,100, 1000 … modulo 17, ce qui donne 1,10, 100 modulo 17 = 15, etc. La suite est 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, … et le motif revient après 16 opérations. Le développement de 1/17 à partir de la 8ème position est 29411764… et 0,29411764 est une approximation de 5/17. Donc si on évalue 5/17 à 8 décimales on a le développement de 1/17 à partir de la 8ème position, on avait déjà 8 chiffres de précision on en a maintenant 16. On peut faire ce calcul avec n'importe quel nombre premier en autant que le nombre premier ne soit pas trop grand bien sûr. Les différents modèles que j'ai eus, ils ont tous servi de façon intensive.

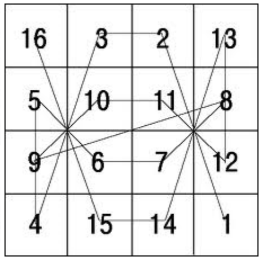
La HP 45 scientifique (1974) et la HP 67 programmable avec cartes (1976)

Timex-Sinclair ZX-81 (1983) et le Apple IIc (1985)

Le Mac Plus (1988)

J’avais lu des livres sur l’arithmétique et les carrés magiques, celui de 4 × 4 me paraissait très mystérieux. Tout d’abord la date, il a été fait en 1514 qui apparait dans le carré, la suite 16,3,2,13,9,10,11,8, … ressemblait beaucoup à la suite des résidus de 1/17 en base 10. Je me suis alors posé la question mais alors si on trouve quelle base donnerait le carré magique ce serait bien! Ça permettrait peut-être de fabriquer un carré magique de très grande taille juste en calculant l’inverse d’un nombre premier bien choisi ? Je ne savais pas qu’il existait des programmes pour en calculer de n’importe quelle taille sur ordinateur.





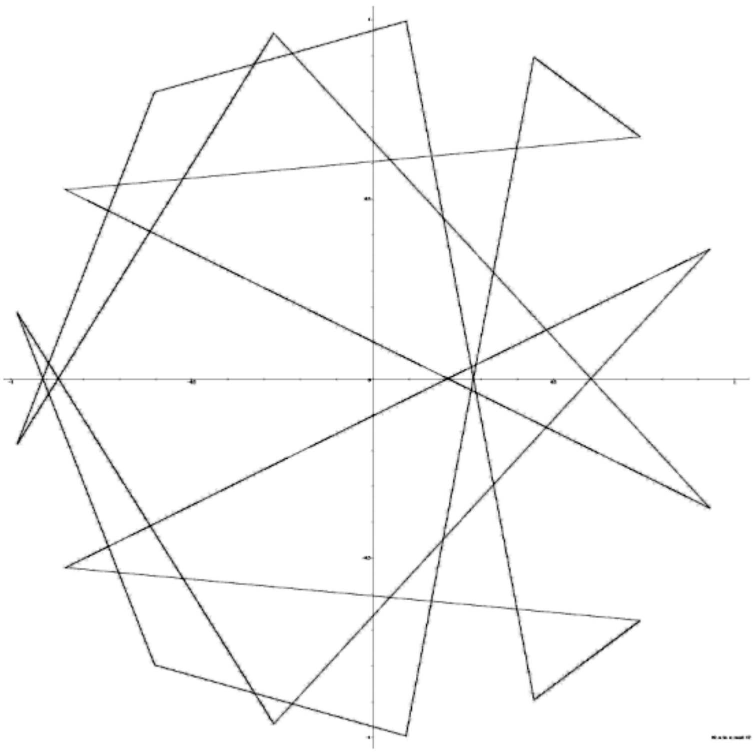
Si on joint les nombres 1 à 16 dans le carré on obtient un dessin symétrique. Je me suis dit mais alors si on prend donc les résidus et qu'on fasse la même chose, est-ce que le dessin sera symétrique aussi ?

En fait, la suite des résidus de 10^n modulo 17 est presque magique. 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, ... Ce sont les restes de la division des puissances de 10 avec 17, exactement comme la longue division qu'on apprend à l'école élémentaire.

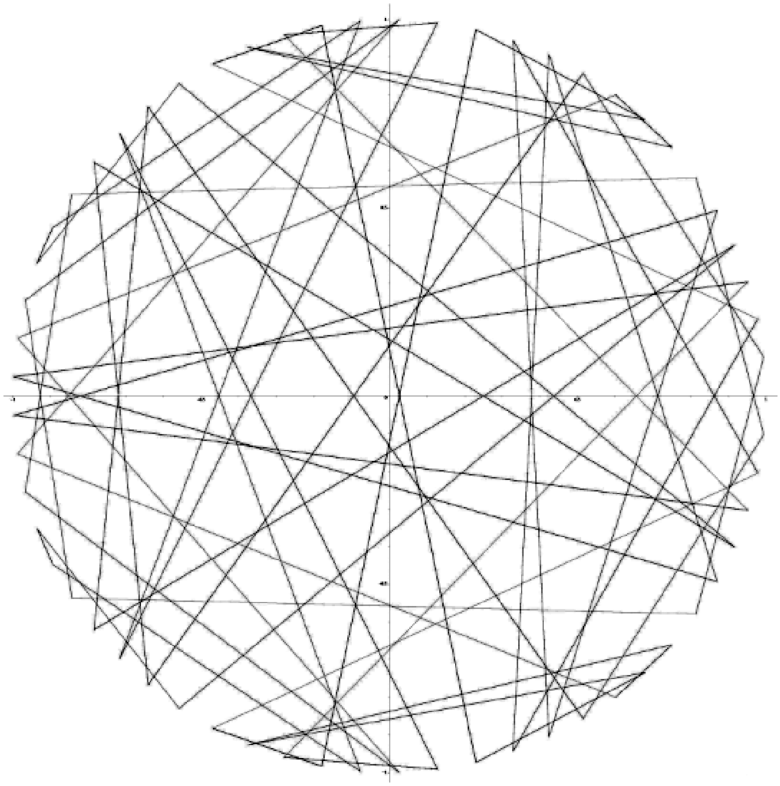
10	**15**	**14**	**4**
6	**9**	**5**	**16**
7	**2**	**3**	**13**
11	**8**	**12**	**1**

La somme des colonnes est 34, 34, 34, 34 mais la somme des lignes ne donne pas une constante. Ça donne souvent 34 mais pas partout. Le carré magique lui donne une somme de 34 dans toutes les directions. Donc je cherchais à fabriquer un très grand carré magique en utilisant des résidus. C'est en discutant avec mon frère

Domino qu'il me suggéra : mais pourquoi ne mets-tu pas les chiffres sur un cercle en fait au lieu de les mettre en carrés ?

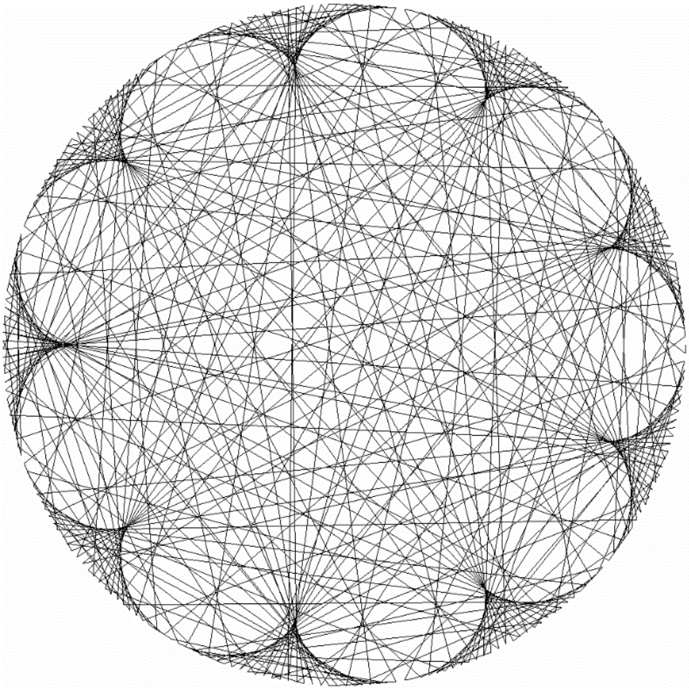


Les résidus de 10^n modulo 17 enroulés autour du cercle.



La même chose avec le nombre 61 en base 10.

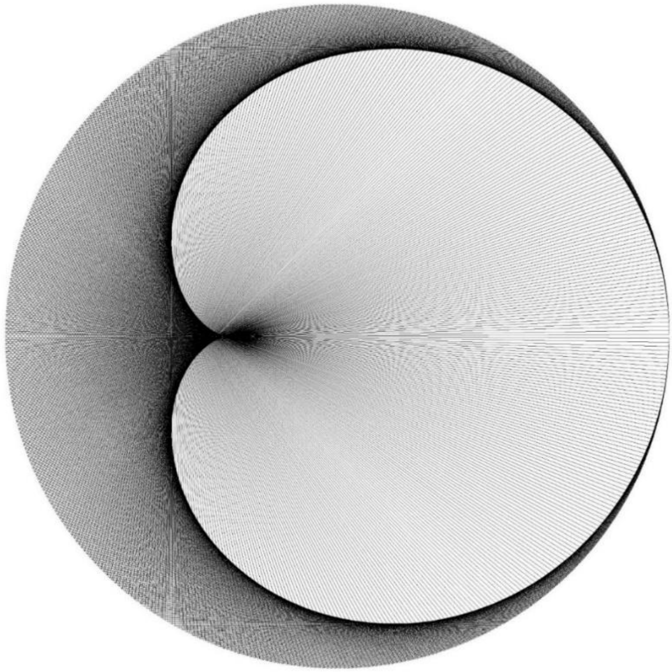
Ah oui je me disais, si on prend un premier plus grand, disons 257 on divise un grand cercle en 256 parties et on joint par une ligne les 256 résidus de 10^n modulo 257. Le choix de 257 est voulu puisque de diviser un cercle


Représentation de 1/257 en base 10

en 256 parties est relativement facile, j'avais compris qu'avec la règle et le compas on pouvait construire ça facilement. Je me mis donc à dessiner un grand cercle d'environ 5 pieds de diamètre (1m 60) sur le mur de ma chambre avec un rail de bibliothèque et construisit le grand polygone et là la surprise totale. Le dessin était sublime.

Mais alors ? Pourquoi 9 pointes ?!, ah oui on est en base 10, si la base est B on aura $B - 1$ pointes. C'est le cas si on prend le nombre premier 181 en faisant 2^n modulo 181 (modulo est le reste de la division) on obtient une période de 180 et le dessin est encore plus

intéressant. Ici le dessin est fait sur ordinateur et p = 1019.



Le dessin de 2^n modulo 1019, la figure est une cardioïde. C'est la même figure qu'on voit dans une tasse à café sous le soleil.

Le Moiré qui apparait est dû à la résolution utilisée qui fait un motif soit sur écran soit sur papier. J'ai compris plus tard que ce dessin d'un nombre rationnel en base 2 est aussi le même qu'on obtient avec la réflexion de la lumière dans une tasse à café (bien connu). C'est curieux cette analogie, ça me rappelait les fils que je tendais dans l'espace à la maison sans savoir à quoi ça rimait mais qui me fascinait.

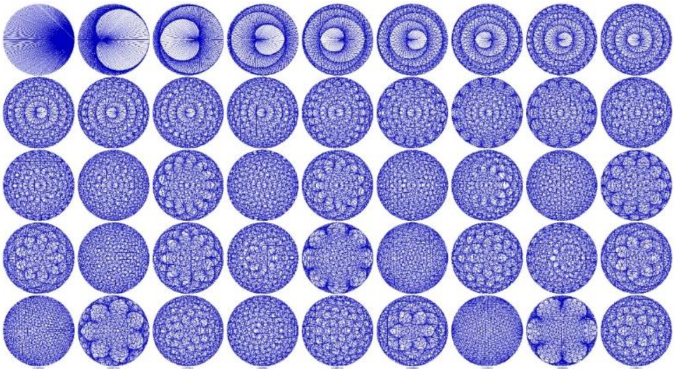
Ce qui me surprenait était la beauté de ces dessins, j'en ai fait des centaines sur papier que je conserve encore. En examinant le dessin symétrique j'apprenais certaines choses sur le développement décimal de 1/257 en base 10. Ce que je n'ai jamais pu expliquer sont les 23 pointes (en 2 tours) qui apparaissent. Il y a plusieurs détails dans le dessin avec ici 1019, il y a 1018 points sur le cercle et 1018 droites qui complètent la figure du cardioïde parfaitement mais elles arrivent en désordre complètement. Voici ce qu'on peut noter pour l'inverse d'un nombre premier. La suite des décimales se divise en 2 et sont complémentaires. Si on additionne les 2 moitiés on obtient '99999…' comme avec 1/7 = 0,142857… Ici 142 + 857 = 999 et c'est toujours le cas même si la période est moins que $p - 1$. Donc les droites arrivent dans le désordre et à la fin la belle symétrie apparait avec des groupes de pointes qui se répètent et je ne comprenais pas pourquoi c'était comme ça.

La découverte de ce dessin a été un choc pour plusieurs raisons. C'est ce qu'on appelle un changement de paradigme. J'avais devant moi la représentation de la longue suite de chiffres qu'est 1/257 = 0.00389105058365… et qui était apparemment inconnue ? Mais, ce n'est qu'un nombre rationnel et j'avais trouvé quelque chose d'inconnu ? Qui ne s'expliquait pas. En plus, selon le nombre qu'on choisit (le nombre premier p), la période non plus on ne l'explique pas. Quand je dis 'on ne l'explique pas' : ça veut dire que pour un p donné il faut calculer à la main

ou sur ordinateur quand la période va s'arrêter. Les bouquins de math qui en parlaient avaient un nom pour ce phénomène : le nom est l'ordre du groupe cyclique. C'est intéressant mais ça ne dit pas pourquoi pour un p donné la période est courte ou très longue. C'était le 2ème choc en fait. J'avais trouvé à la main, en m'aidant de la calculatrice, quelque chose d'inexpliqué. J'ai compris une chose, il y a des lois ou principes ou règles qui existent dans la nature mais que nous pauvres humains on ne comprend pas ou très mal. Même avec les progrès énormes qui ont été accomplis au XXIème siècle on est toujours bloqué sur les nombres rationnels ? C'est à ce moment que mon cerveau a commencé à mouliner la nuit pour expliquer certaines choses comme ces périodes. Cela a eu comme effet de m'éloigner des mathématiques dites officielles ou formelles, je voyais bien que même si on a la preuve de quelque chose, souvent en fait ça masque le fait qu'on ne comprend pas tout à fait ce qui se passe. La réponse n'est pas dans le formalisme à tout prix.

La réflexion de la lumière dans une tasse à café.

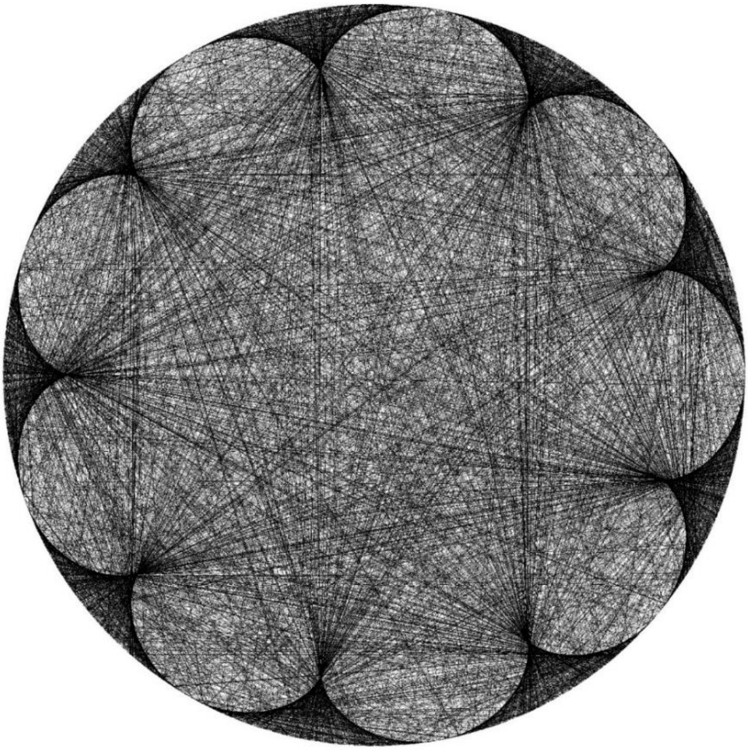
Il y a 2 façons de construire ces dessins. Soit on calcule les résidus soit on met à l'échelle de la façon suivante. On considère que le tour du cercle va de 0 à 1 et on trace les droites en déplaçant le point décimal vers la droite. Avec 1/17 en base 10 on obtient donc les points 0,0588235…, 0,588235, 0,8823529, 0,8235294, … C'est alors que je me posai la question mais si on fait la même chose avec un nombre comme π qu'est-ce que le dessin donne de bon? La réponse est : rien de spécial.



J'ai cherché longtemps la relation entre les réflexions de la lumière (comme dans la tasse à café) et les opérations pour faire ces dessins, ici les 44 premières réflexions de la lumière si on prend 257 points autour du cercle.

Les réflexions à partir d'une seule source, ici les 44 premières images. Si le rebord d'une tasse à café était parfait on verrait ces figures dans une tasse à café. La bonne question était alors si 1/257 en base 10 représente ici la 57ème réflexion du rayon de lumière sur une tasse à café parfaite, alors le nombre π représenté en base 10 est la réflexion de quoi au départ ? Je n'ai jamais trouvé la réponse à cette question.

J'en suis venu à faire un tas d'expériences avec toutes les bases autres que 2 ou 10 et tous les autres nombres premiers.



π en base 10, les premières 10000 décimales.

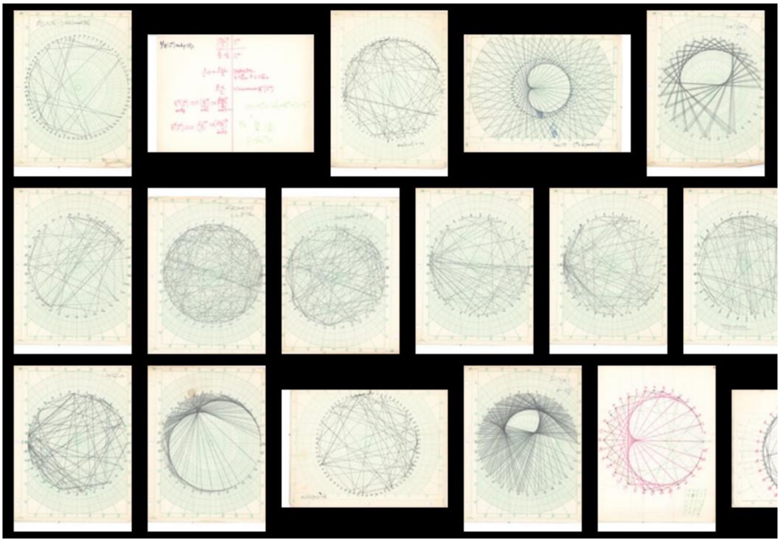
J'ai contemplé ce dessin fait avec les décimales de π pendant des heures à chercher un motif.

En fait ce qu'on voit est comme si on avait fait le dessin d'un nombre rationnel mais qui serait très grand. Des tests ont déjà été faits de façon extensive sur ce sujet et jamais rien n'a été trouvé. En d'autres mots, c'est comme de regarder la télévision lorsqu'il n'y a pas de signal, on voit des taches noires et blanches au hasard qui n'ont aucune signification. Encore une fois les 9 pointes ne sont dues qu'à l'utilisation de la base 10.

Tout de même une question restait sans réponse : Si on veut calculer 1/257 par exemple, il est assez facile de calculer à l'avance la position 100, on a une formule directe pour le faire, il suffit d'évaluer 10^{100} modulo 257 et de regarder le résidu qui est 187. Donc à partir de la position 100 le développement décimal de 1/257 est 187/257. Mais alors pourquoi ne pas trouver une façon de faire la même chose avec π ? Cette question m'a trotté dans la tête pendant 20 ans. Quand j'en parlais à des professeurs de math ils n'avaient pas la réponse mais aussi ils devaient se dire que je suis débile de m'intéresser aux fractions et surtout à cette suite de chiffres. Dans la hiérarchie des abstractions sans fin des mathématiques, les fractions dites vulgaires qui vient du latin ou en français : un nombre sur un autre, c'est l'étage zéro ou même la cave. Vulgaris veut dire commun, relatif au public, relatif à la foule, qui appartient à tout le monde, général.

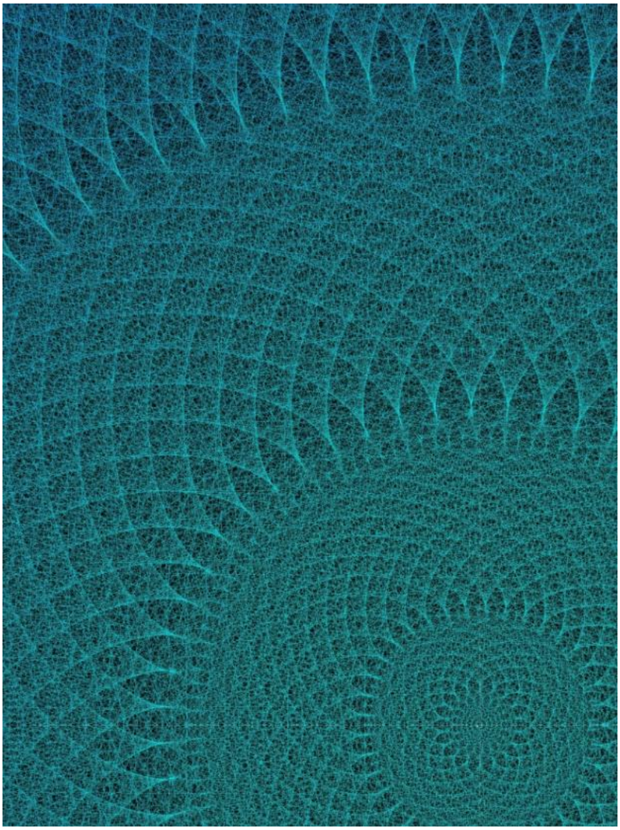
En 1979, un congrès régional a lieu à Ottawa et on m'invite à parler de ces cercles. Pour l'occasion, un terminal graphique Tektronic est fourni et pour le programmer il faut utiliser le FORTRAN. J'en ai réussi quelques-uns mais pour faire des expériences j'utilisais plutôt la calculatrice et les dessins étaient faits à la main.

Voici les quelques expériences effectuées à la main.



On peut les voir sur mon site en bien meilleure résolution

Mais maintenant que j'ai une grosse bécane à la maison j'en ai profité récemment en prenant les rationnels en base 240 pour avoir un maximum d'effets et avec une taille de graphiques allant jusqu'à 32768×32768, ce qui représente plus de 1 milliard de pixels.
Voici les quelques cas de figures faites avec la base 240 pour certains nombres premiers.



Près du centre de 240^n mod 26437 en couleurs inversées pour une meilleure visibilité
$P_0 = 239, P_1 = 92$
Le nombre de pointes sont parmi la liste des harmoniques: 1, 17, 18, 19, 20, 35, 37, 54, 55, 56, 57, 72, 73, 74, 75, 91, 92

Chapitre 3

L'inverseur

Il n'en fallait pas plus pour me piquer, c'est alors que je me suis mis à apprendre par cœur les 4400 premières décimales du nombre π. Début 1975 je me rends au Salon du Livre à Montréal et il y avait un livre : Le Livre des Records. J'y apprend que quelqu'un avait appris par cœur 3025 décimales de π. Je trouvais ça incroyable et décidai d'essayer moi-même pour voir.

Ma surprise a été de constater que ça m'était relativement facile d'en apprendre 300 le premier soir mais pour passer de 300 à 4400 j'y ai mis 6 mois.

Pour arriver à réciter autant de chiffres, je m'étais fait une méthode qui consistait à d'abord écrire une centaine de chiffres en 10 rangées de 10 chiffres. Ensuite je cachais la feuille et faisait de mon mieux pour réécrire les 100 chiffres et je répétais la même chose habituellement 5 ou 6 fois. Cet exercice me prenait environ 30 minutes. Ensuite il fallait mettre cette nouvelle centaine avec les autres apprises avant. C'est là que c'est moins évident, pour y arriver je m'isolais dans le noir sans bruits et surtout pas de cigarettes ou de café. Je voyais les chiffres par blocs de 100 et les récitais dans ma tête, ça demandait quand même une certaine concentration. Certains me disaient « mais c'est de la

folie! » je disais oui mais d'abord j'adore faire ça et ce recueillement est comme une espèce de méditation transcendantale (jeu de mot) puisque le nombre π est transcendant. Ce mot a été créé pour décrire les nombres comme lui qui ne sont pas la solution d'une équation algébrique comme par exemple $\sqrt{2}$ qui est la solution de $x^2 = 2$. C'est un certain Lindemann qui a prouvé ça en 1882. Quand on les connait par cœur par blocs de 100 on peut jouer au jeu suivant. Quelqu'un demande, quelle est la décimale de rang 1782 ?, j'arrivais à répondre en quelques secondes le bon chiffre 9 fois sur 10.

Cet exercice de mémoire était espèce de contemplation de ce nombre si mystérieux. Mais en fait, je me suis accroché les pieds avec ce nombre pour plusieurs raisons. Lorsque j'étais plus jeune, ces livres TIME-LIFE étaient ma référence et bien sûr Einstein. Je voulais comprendre ce qu'Einstein avait fait, je me mis donc à lire des bouquins de physique auxquels je ne comprenais strictement rien, ces équations de la relativité, la mécanique quantique, etc. J'étais donc fasciné mais assez ignorant des théories courantes.

À un moment donné, je suis tombé sur un livre qui expliquait les quantas de Planck et là ou apparaissait cette unité fondamentale appelée h comme étant la plus petite unité d'énergie possible. Ce h est minuscule et on disait il y a 2 versions, le h standard et le $\frac{h}{2\pi}$ appelé h barre. Donc on expliquait aussi que le rayonnement d'un

corps noir était relié à une équation ou intervenait π, une autre loi physique disait aussi que la permittivité du vide est ϵ_0 qui une fois mis à l'échelle faisait intervenir π encore une fois. C'est là que j'ai bloqué et me suis demandé mais pourquoi faut-il toujours qu'il y ait π dans ces équations ? Ma compréhension de la physique était liée à cette équation de Newton qui avait trouvé comment la gravitation agit sur les corps comme la lune et que cette force est la même qui fait tomber une pomme du haut d'un arbre, ça je le comprenais bien. La formule de Newton était pure, celle de $F = ma$ aussi celle d'Einstein $E = mc^2$ également. Je me disais mais en fait, pourquoi a-t-on besoin d'une constante mathématique dans l'équation de la relativité générale ? Et les autres ? Pourquoi le nombre π partout ? Et les constantes mathématiques ça sert à quoi au juste ?

$$G_{\mu v} + \Lambda_{g_{\mu v}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu v}$$

L'équation de la relativité d'Einstein

Toutes ces raisons m'ont fait changer de direction, la physique m'intéressait pas mal moins et les mathématiques ou la théorie des nombres était ma nouvelle religion. Mais j'avais lu que la théorie des nombres est considérée comme la partie la plus difficile des mathématiques, c'est facile de comprendre une équation en théorie des nombres mais très difficile de la prouver. La plus célèbre équation était certainement la fameuse conjecture de Fermat, $x^n + y^n = z^n$ est impossible à résoudre si $n > 2$. Le cas $n = 2$ est connu

ce sont les triplets de Pythagore bien connus comme $3^2 + 4^2 = 5^2$ ou $12^2 + 5^2 = 13^2$. Wiles a démontré que c'était impossible si n > 2 en 1993. La conjecture de Fermat est devenue le théorème de Fermat-Wiles.

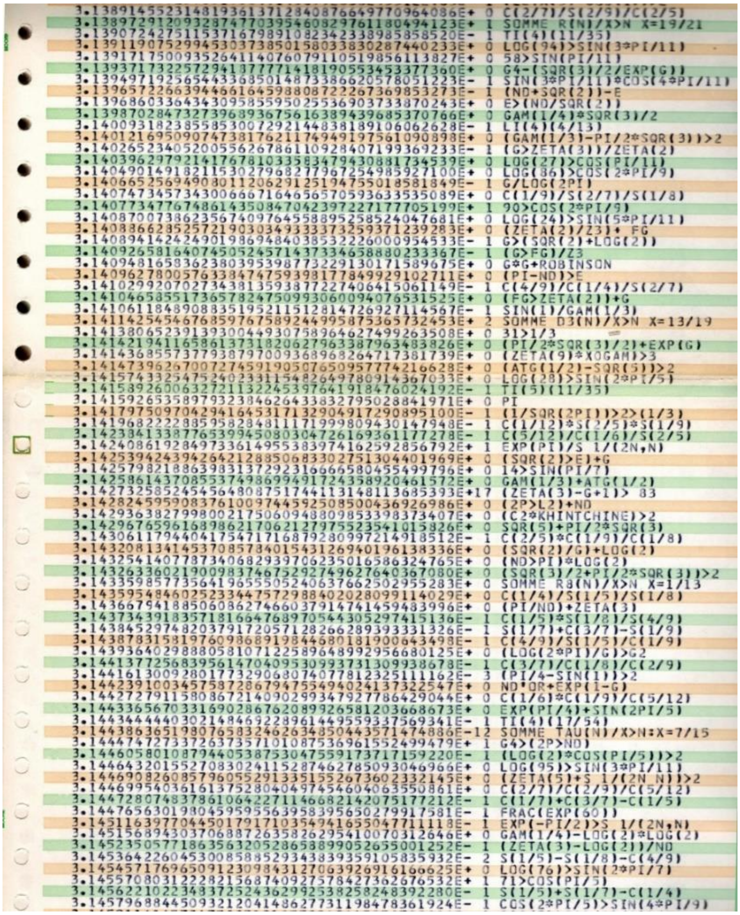
Je ne savais pas l'époque qu'on avait réussi à prouver qu'avec $n = 3$ et un bon paquet d'autres que la preuve était déjà faite : c'était considéré comme presque prouvé pour tous les n saufs quelques-uns. J'ai donc essayé en vain de trouver une façon de le faire avec $n = 3$. Je me faisais des tableaux numériques avec les sommes de 2 cubes et essayait de comprendre pourquoi ça ne fonctionnait jamais. J'avais lu la preuve pour $n = 3$, due à Euler, je ne saisissais pas la subtilité de l'argument du tout. D'ailleurs les preuves mathématiques pour la plupart je n'y comprends pas grand-chose. Je peux oui arriver à comprendre la preuve que $\sqrt{2}$ est irrationnel ou autres exemples connus mais d'arriver moi à construire une preuve me semble une perte totale de temps. Cette attitude envers les mathématiques ne m'a certainement pas aidé de façon académique. Je me rappelle avoir eu 10 % dans un examen de logique au collège (Cégep du Vieux Montréal) et presque toute la classe avait des notes frisant le 85/100 et tout le monde me disait mais tu n'y comprends rien du tout ? La logique d'une preuve, j'y suis assez hermétique.

Pourtant à ce même cégep je lisais ou tentait de lire le fameux livre de Hardy et Wright sur la théorie des nombres, ça me parlait plus que les cours. Je ne

comprenais pas les preuves mais les explications m'apparaissaient assez limpides et surtout m'inspiraient beaucoup pour faire des calculs, des dessins. Les calculs j'ai pu les faire à ce même CEGEP, il y avait une salle informatique avec des terminaux et j'y découvris un programme BASIC qui permettait de calculer à 60 décimales, quel bonheur pour moi. J'y passais la plupart de mon temps, c'était soit la bibliothèque assez bien fournie et le centre de calcul. En fait, j'avais depuis longtemps cessé d'aller aux cours. La même chose s'est produite à l'Université du Québec quelques temps après, je me suis inscris comme auditeur libre et le suis resté un bout de temps, jusqu'à m'inscrire éventuellement. Les mêmes causes donnant les mêmes effets, ça a fini par me lasser aussi. Je me rappelle de mon bulletin à l'UQAM avec mes notes, ça allait de A à Z, j'avais eu à peu près toutes les notes possibles, des meilleures aux pires. Je m'amusais à dire qu'avec les lettres de mon bulletin je pouvais jouer au Scrabble. Je n'avais même pas la moyenne graduée. Quand je me suis inscris en mathématiques j'étais allé voir le directeur, Monsieur Garançon. Il m'a regardé et a dit, ok on va te prendre ici comme auditeur. De toute façon dans ce domaine ce n'est pas comme dans les grandes écoles où il faut avoir une bonne moyenne pour y entrer, un seul regard suffit. Qui est assez fou pour aller s'inscrire en mathématiques à l'Université si cette personne n'est pas déjà piquée par les maths. C'est probablement ce que ce directeur se disait j'imagine.

Je continuais mes recherches sur ces cercles, les décimales et les nombres en général. Jusqu'au jour où

j'ai pu me payer un ordinateur Apple llc en 1985, j'y avais installé un compilateur BASIC qui permettait d'avoir 54 décimales de précision, une vraie merveille pour moi. Il utilisait des disquettes de 5 pouces ¼ que je remplis rapidement de chiffres, j'avais constitué une base avec AppleWorks. C'était limité, j'en avais toute une pile, j'allais à la bibliothèque du HEC pour y trouver des exemplaires du fameux *Mathematics of Computation* , il y avait des articles où on calculait des constantes mathématiques. Il y avait aussi des microfiches avec des tables mais peu utilisables, je les entrais à la main dans mon ordi pour construire ma table de nombres. La table de ces nombres a commencé en 1986. Plus tard, en 1989, je me suis dépoché (vidé ma tirelire) pour me payer le Mac plus avec un disque dur de 60 mégas. Ça valait une fortune à l'époque, 1000 euros seulement pour le disque dur. La moitié du disque a lui aussi été remplie de chiffres. Je m'étais fait un catalogue des nombres réels sur HyperCard. J'ai vite atteint la capacité de ce programme, c'était bien pour gérer quelques tables mais nettement insuffisant pour des millions d'entrées. J'avais même mis mes fichiers sur disquette pour les mettre sur le système informatique central à Via Rail Canada. Je sortais de longs listings sur du papier pyjama (avec les rayures). Mon patron m'a demandé à un moment donné c'est quoi tous ces chiffres ? Je lui ai donné une réponse vague. J'ai conservé ce vieux listing bien sûr.



Premier gros fichier informatique de la table des constantes (1988) résidait sur l'ordinateur central de Via Rail Canada. Je sortais ces gros listings en cachette.

J'ai mis au point un programme qui utilisait ces tables vers 1993, À l'époque ça avait permis de trouver la réponse à une question toute simple. Si on regarde la plupart des livres de mathématiques qui contiennent une formule explicite, la formule est toujours faite de la même façon, à savoir :

$$\int \boldsymbol{f} = \boldsymbol{x} \quad ou \quad \sum \boldsymbol{f} = \boldsymbol{x}.$$

Souvent le procédé à gauche est une intégrale, une somme ou une autre formulation compliquée qui une fois évaluée permet d'obtenir une réponse numérique. Mathématiquement, une intégrale ou une somme : c'est la même chose. Donc toutes ces formules vont toujours de gauche à droite. Mais serait-il possible d'aller dans l'autre sens ? Par exemple, si on a le nombre 1,414213562… qu'est-ce que c'est? Il n'est pas difficile de trouver que le nombre est fort probablement $\sqrt{2}$ puisqu' il suffit de mettre le nombre 1,414… au carré pour trouver. La plupart des fonctions simples ont un inverse (mathématiquement une fonction réciproque en français). Il n'y a qu'à inverser. Pour moi inverser comme avec les nombres premiers me semblait la chose à faire pour découvrir mais ce n'est pas toujours aussi simple.

L'univers des nombres est très vaste, tellement vaste qu'un mathématicien une fois en est devenu presque fou. Son nom : Georg Cantor, il a imaginé comment on pouvait les compter, les énumérer, en faire une liste. Ça l'a rendu fou. Non seulement ce n'est pas possible mais il y a même un autre matheux qui en 1963 a dit : C'est indécidable. Indécidable en mathématiques indique de façon simplifiée que la question est mal posée, on ne peut pas y répondre si la question est faussée. On ne sait pas. Les nombres sont en nombre infini oui, mais tellement infini que de les compter est

impossible. Tout ce qu'on peut compter ce sont les nombres dits naturels à partir de 1. À la queue-leu-leu, 1,2,3,4, ... ce comptage est infini mais c'est un infini raisonnable ou gentil qui a une adresse, un numéro d'ordre, là oui. On distingue 2 infinis maintenant, l'infini gentil ou énumérable comme N (les nombres naturels) et l'infini fou ou non-énumérable qu'on appelle R (les nombres réels), entre les 2 c'est le grand vide. Ce qui a rendu complètement marteau monsieur Cantor au début de 1900 est l'argument suivant, il s'est dit : si on fait une liste de tous les nombres réels (nombres avec un point décimal), alors si on réussit cet exploit, il y a un gros problème. Une fois l'énorme liste complétée, il est toujours possible d'en faire une autre en prenant la diagonale, rien n'empêche quelqu'un qui prendrait la diagonale de la liste pour construire d'autres nombres, une autre liste. On n'en vient pas à bout en fait, c'est impossible de faire une liste des nombres réels (n'essayez-pas ça rend dingue). Alors moi qui le suis un peu, c'est ce que j'ai fait.

C'est ce que j'ai tenté de faire en tous les cas, déjà en avril 1986 j'ai commencé ma table, j'en étais à quelques milliers en 1986, puis 2 millions vers 1992-1993, 12 millions en 1995, 54 millions en 1998, 17.3 milliards en 2018 et 114.3 milliards en 2022. C'est même devenu trop gros pour internet. La table occupe 9100 gigas. Jusqu'à tout récemment elle était disponible sur internet, mais bon après 25 années de présence depuis 1995, j'ai décidé de tirer la prise (pull the plug) et la garder pour moi sur mes nombreux disques durs à la

maison, j'en ai une cinquantaine, j'en bouffe tellement que je les achète en paquets de 4, 260 TB en tout, dont 84 sont remplis de chiffres.

À Bordeaux (1992-1993), c'était mon projet de fabriquer un inverseur, j'avais les tables et quelques programmes. J'étais certain que cette idée pouvait être intéressante, ça n'a pas convaincu mon directeur de thèse du tout il trouvait ça débile et sans intérêt. Eux à Bordeaux étaient plutôt partisans d'une méthode théorique qui utilise beaucoup d'algèbre tandis que ma méthode à moi était complètement différente. J'utilisais plutôt le programme GFUN et quelques autres de mon acabit pour justement craquer une suite. Craquer une suite étant de trouver une formule close, une formule close ou dit autrement : simple. La pierre angulaire de cette démarche est qu'en fait j'avais un modèle pour craquer les suites. C'est une série de tests avec GFUN et quelques autres programmes qui en moins de quelques secondes fournissait une réponse dans à peu près 25 % des cas. Tout ça était purement numérique en fait, pas théorique. Ce qui était plutôt contraire à la méthode sur place. J'aurais peut-être dû faire comme on dit : À Rome, fais comme les romains. J'ai fait exactement en sens contraire. Cela a eu comme effet de m'isoler. C'était à l'époque du livre des suites qui allait être complété plus tard. Je travaillais avec Neil Sloane et c'est lui qui était propriétaire de la table des suites, j'avais eu des demandes de ma directrice de thèse pour en avoir une copie, j'ai dû refuser. Ils ont quand même copié la table, j'étais très fâché. J'étais le seul autorisé à avoir une copie. Avec eux à Bordeaux ça s'est assez mal passé.

Tout d'abord mon projet d'inverseur n'a même pas été considéré comme sérieux et sur la propriété de la table non plus. Je suis parti en fort désaccord avec eux. Pourtant en aout 1992, ça s'annonçait bien. Maintenant ils utilisent cet outil de GFUN à tour de bras dans tous leurs calculs. Ce n'était pas la dernière fois que j'ai eu des déboires avec les chercheurs des universités. C'était la première tentative de doctorat que j'ai eue mais il y en a eu 5 autres. Revenu à Montréal en septembre 1993, je n'ai pu trouver du travail qu'à Air Canada comme programmeur ce n'était pas exactement passionnant mais ça me permettait d'avoir au moins de quoi manger. Quand l'occasion s'est présentée d'aller à Vancouver à l'Université de Simon Fraser comme associé de recherche dans un vrai laboratoire j'ai eu la 2ème occasion d'entreprendre un doctorat. Mon directeur de thèse voulait que je dépose un article avec lui pour sur le ISC, j'ai refusé. Je suis parti avant que ce doctorat ne se concrétise pour de bonnes raisons. Je m'étais fait avoir avec la formule de π, je ne voulais pas qu'on m'enlève mes tables. Je refusais de faire un doctorat si je ne peux pas assurer qu'au moins je puisse avoir un poste dans un CÉGEP (lycée niveau terminale), ça ne s'est jamais produit, j'ai fait chou blanc à chaque fois. Plus tard en 1999, on m'a même offert un doctorat honorifique à l'UQAM (Université du Québec À Montréal). On me dit : Simon, on va te donner un doctorat honorifique, bien sûr j'étais d'accord, pour me rendre compte qu'en fait il fallait que je m'inscrive au doctorat et payer les frais, que je suive les cours et évidemment déposer une thèse. Mais ce n'est qu'une inscription au doctorat ce que vous

me proposez. Ce n'est pas du tout un doctorat honorifique. J'ai laissé tomber ce projet. En fait, je ne croyais pas du tout au fait d'obtenir un doctorat pour faire de la recherche et obtenir un job. Le diplôme de Masters je l'avais déjà et il est suffisant pour enseigner au CÉGEP, en plus le livre qui avait été publié était mondialement connu et ça n'a pas du tout débouché sur un job de professeur là où je le voulais. J'ai cru pendant un temps que je devais être mauvais au point que personne ne voulait de moi mais quand j'ai vu que toutes les personnes que j'avais côtoyé durant mon séjour à l'UQAM avaient un poste quelques part, j'ai compris que tout ça n'avait rien à voir. Je me disais, ils ne vont quand même pas embaucher les plus mauvais de chez les mauvais, bien oui, c'est ce qui est arrivé. J'ai recontacté à plusieurs reprises les personnes que j'avais connues mais ça n'a jamais débouché. En 2007, un ami du Cégep Maisonneuve à Montréal me dit : Simon, je vais te donner du piston et on va pousser ton cv aux ressources humaines au cégep. Il ne s'est rien passé du tout. Je me disais, même avec un ami bien placé dans la boite ça ne fonctionne pas. On ne m'a même pas contacté pour me dire que ça ne les intéresse pas. J'ai fini par partir en France au mois de juillet après avoir perdu mon poste de programmeur. Comme je le disais, on t'amène une boite de carton et tu as 10 minutes pour ramasser tes trucs et tu te retrouves sur la rue en moins de 1 heure. Avec l'UQAM les relations sont bizarres, j'ai eu beau essayer ne serait-ce que d'être un chargé de cours (contractuel), ça ne donnait rien du tout. Au mieux j'ai pu obtenir vers les 2000, un poste de remplaçant

pour des séances d'exercices pour 1 cours, donc pas exactement un poste. Bien plus tard en 2004, l'UQAM m'a remis un prix, le prix Reconnaissance scientifique et en 2019 j'ai été invité comme conférencier principal à l'ETS (branche de l'UQAM), tous frais payés pour une conférence sur le calcul symbolique. D'un côté je suis maintenant reconnu même au niveau international mais toujours pas de job même dans ma propre cour. Ce n'est qu'en France et par hasard que j'ai pu obtenir pour la première fois un vrai job de professeur à l'Université de Nantes. Je dis vrai poste mais en fait je ne suis que contractuel bien sûr mais ça me convient. Quand les étudiants me demandent quel poste j'occupe au juste à l'IUT je leur dis je suis un SABT, un sous-adjoint bouche-trou, je ne suis qu'un contractuel mais j'aime beaucoup donner ces cours de mathématiques quand même.

L'inverseur qu'est-ce que c'est ?

Un ensemble de 114.3 milliards d'entrées : voici un extrait autour du nombre 1,2311…

```
1.231128124562335203060738696976876111619771193919504472594326026e0 m013
(3*ln(2)-3)/(3/4*arctan(1/2)+2/5)
1.231128124640452407257216220975964193496649436970589890527381957e0 l007
1+frac(log(611318174))
1.231128125089705837268291476228062969893028608504710840325180031e3 g005
2/3*GAMMA(2/11)*Pi^3*csc(1/10*Pi)^2/GAMMA(9/10)^2*3^(1/2)/GAMMA(2/3)
1.231128125494823349659952421698526920412713012608144998088174308e0 a018
(45/58+2/31*71^(1/2))^(3/4)
1.231128125905474764639844205838749519773952385993058620554089576e0 a019
47399801^(1/85)
1.231128125933246212199102723970882000360864000440509730967070319e1 s005
A200597[n]/((-1)^(n+1)*exp(n)+1) with base (-1)^(n+1)*(exp(Pi*n)+1)*n
1.231128125973775691660285147956907300657554724332188098872622516e0 a019
16759469^(1/80)
1.231128126030092893616670533782474920331852309912110892928008766e0 a019
13613099^(1/79)
1.231128126262743098539849289683093489784904499926814752013636196e7 a019
87325211^(25/28)
1.231128126276261780695041273276923321699788027180103458659804708e0 l007
1+frac(log(611318175))
```

Chaque entrée en décimal est suivie de l'exposant de 10, d'un numéro de table suivi de la description. La description est en langage Maple la plupart du temps ou en langue naturelle. Quelques millions d'entrées sont décrites en langage Mathematica. Il y a 26 catégories de tables. La catégorie 'v' est pour toutes les séries infinies. La catégorie 'a' est pour tout ce qui est algébrique comme $\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{3}$.

Les tables numériques sont toutes triées numériquement bien sûr et séparées en 9000 morceaux. J'expliquerai plus loin pourquoi il faut que ce soit ainsi.

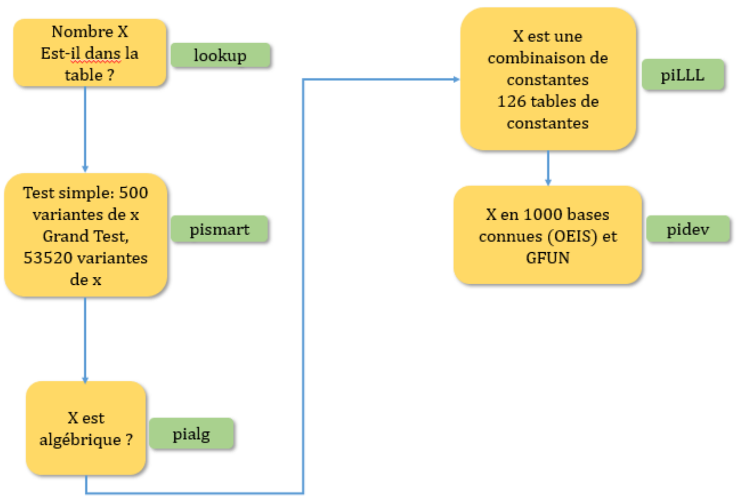
La première opération effectuée est de nommer la constante K et de voir si le nombre est dans la table.

La 2ème opération regarde si une variation de la constante s'y trouve. Les variations sont $K - \frac{a}{b}$, $K + \frac{a}{b}$, $K \cdot a/b$ et a/b est un rationnel simple qui va de ½ à 63/64, il y a 389 fractions simples en tout. Ensuite viennent les fonctions de base comme cosinus, tangente, arc tangente, logarithme, exponentielle, etc. En tout, 500 variations pour le programme *pismart* : il effectue un *smart lookup.* Le lookup en fait est le plus simple qui existe puisqu'il y a une propriété intrinsèque aux tables numériques : elles sont naturellement triées au départ, elles sont déjà en ordre numérique. Donc si on effectue un *lookup* on peut utiliser la fonction *look* du système Unix qui dit instantanément si une entrée se trouve dans un fichier à condition qu'il soit déjà trié par ordre numérique ou alphabétique. C'est un énorme avantage puisqu'il n'y a aucune programmation à faire pour savoir si 1,512312… se trouve dans une table. Un ordinateur de bureau ordinaire sur une de mes tables arrive à faire au moins une requête en 1/160 de seconde, c'est bien plus rapide si le disque où réside la table est rapide comme avec les disques dits SSD, ce n'est pas un plateau qui tourne, c'est une mémoire électronique. Certains de ces disques sont 20 fois plus rapides qu'un disque à plateau tournant. Donc malgré que la table compte 17,3 milliards d'entrées j'arrive à faire 1 *lookup* en 1/75ème de seconde. J'ai plusieurs versions de ces tables selon l'usage. La petite table a 12.5 milliards d'entrées, la grosse en a 114.3 milliards, elle est bien plus complète mais c'est plus lent pour y accéder.

Si la recherche *lookup* ne donne rien même avec les variations il m'arrive d'utiliser le *super-lookup* qui consiste à faire 16 variations de la constante K bien choisies et de lancer le programme de recherche. Ici on parle de 42268 requêtes qui prennent une bonne minute à être exécutées.

Si le *super-lookup* ne donne rien je lance alors le test pour savoir si la constante K est algébrique. Le degré qui peut être testé dépend directement de la précision au départ. Si on a 64 chiffres décimaux, le programme peut raisonnablement dire si la constante est de degré 8 ou moins. Si on a bien plus de précision on peut facilement aller jusqu'au degré 100 mais ces cas sont rares.
Il reste ensuite à effectuer le test des développements généralisés. Ici la constante K est modifiée pour être représentée par une autre base, comme je disais j'en ai énuméré plus de 1000. À chaque nouvelle base j'obtiens une suite numérique qui est testée avec le programme GFUN. Le test d'une une minute environ et ne nécessite que 24 décimales de précision.
Le dernier test est le test dit LLL appelé *piLLL,* j'ai nommé les programmes de mon inverseur pi-quelque chose pour plusieurs raisons. La première est que c'est π bien sûr mais aussi que Plouffe Inverter en anglais c'est PI, ça faisait une 2ème bonne raison. Donc le premier programme est pismart, ensuite pialg, ensuite pidev et finalement piLLL. En tout il y a 29000 lignes de code en Maple mais une bonne partie est prise par le test piLLL

qui demande des constantes à une précision de 512 chiffres et il y a 126 tables.
Voici un diagramme qui explique les étapes de l'analyse d'une constante X.



Quand j'ai rencontré les 2 directeurs du centre à Vancouver au début de 1995, ils m'avaient invité pour parler d'une éventuelle embauche au sein du centre (le CECM). Au cours de nos discussion j'ai eu l'idée de faire un programme qui fonctionnerait comme une calculatrice et qui aurait un affichage mais avec 1 seul bouton. D'où l'idée d'appeler ça un inverseur, je propose alors d'appeler ça : Inverse Symbolic Calculator ou ISC. J'imaginais qu'au lieu d'appuyer sur des boutons pour avoir une réponse le petit programme on y met un nombre et ça donne quelles auraient été les boutons qui ont été appuyés pour trouver cette réponse. On met la réponse et ça donne la question. Cette idée leur a plu

immédiatement, d'autant plus que j'avais déjà sur mes disques durs un inverseur maison avec des millions d'entrées. Justement eux aussi avaient travaillé dans ce domaine puisqu'ils avaient publié un livre appelé *Dictionary of Real Numbers* qui contenait 100 000 entrées mais à 8 décimales de précision. Pour moi 8 décimales de précision seulement me rappelle les jours où j'essayais de briser la limite de ma calculatrice. Évidemment je leur ai demandé si je pouvais avoir une copie de la table du livre plutôt que d'avoir à tout retaper ou scanner. Je n'ai jamais eu cette copie, pour une raison que j'ignore ils ont toujours été vagues au sujet de cette table. J'ai bien compris qu'en fait ils avaient fait travailler un étudiant pas cher pour avoir le résultat et qu'ils ne voulaient pas que je découvre qui avait fait le travail en fait. Cet étudiant je l'ai rencontré après et j'ai discuté avec lui, il était un peu amer de son expérience. Donc avec cette table en 1995, dès le départ j'ai pu monter un site web avec le nom : Inverse Symbolic Calculator peu de temps après mon arrivée à Vancouver. Je suis arrivé en mai 1995 et le site ouvrait le 18 juillet 1995. Ça été un succès dès le départ, plusieurs articles ont paru qui en parlaient. J'ai même eu une interview à la radio pour expliquer tout ce qui se passait à ce centre. Cette année 1995 a été pour moi une *Annus Mirabilis*, une année merveilleuse. Le livre était publié, je venais d'arriver à Vancouver, le site internet du ISC était un succès et pour couronner le tout : la découverte de la formule de π et de l'algorithme. Il y eut d'autres découvertes au cours de l'année qui a suivi. J'ai trouvé comment calculer les nombres de Bernoulli et d'Euler

très rapidement en utilisant les puissances du nombre π, ce que j'avais trouvé allait des centaines de fois plus rapidement que ce qui était connu. À la fin de 1996, j'ai publié un court article qui expliquait qu'en fait on peut calculer à la main la 1000ème décimale de π sans avoir à calculer les 999 autres avant, comme tel c'était une première historique. Mon algorithme n'était certainement pas aussi rapide que celui pour la base 2 mais la faisabilité du calcul était bien réelle. On pouvait le faire avec une calculatrice de 8 chiffres et 4 opérations.

J'ai commencé alors à m'intéresser à toutes ces fonctions qui vont de [0,1] vers [0,1]. Il y a plusieurs façons de décrire ces fonctions on dit aussi les distributions modulo 1. À chaque fois qu'une fonction est réelle dans l'ensemble $\mathbb{R}$ il y a toujours la possibilité de l'étudier modulo 1. Modulo 1 signifie simplement qu'on ne considère que la partie décimale ou fractionnaire d'un nombre. Ce cercle était donc la façon qui me semblait naturelle pour les étudier. Dans ce domaine, beaucoup de questions et peu de réponses. Par exemple si on étudie à quoi peut correspondre les nombres π^n. Si on les étudie modulo 1 on a alors la fonction { π^n }, les { } indiquent que c'est la partie fractionnaire de π^n. { } est aussi utilisée pour indiquer l'arrondi quelques fois. Les valeurs sont donc, 0.141593, 0.869604, 0.00627668, 0.409091, 0.0196848, 0.389194, 0.293228, 0.531016, 0.0993334, ... Et ça ne correspond à rien de connu. Si on fait un graphe de toutes les façons possibles : on n'arrive à rien non plus. Ces nombres ont

résisté à toutes les investigations connues. En fait, je voyais toutes ces suites, nombres et fonctions de la même façon, il suffisait de regarder. Un exemple est la suite A001540, elle faisait partie du premier livre HIS en 1973, elle se lit comme suit : 0, 2, 8, 36, 184, 1110, 7776, 62216, 559952, … elle correspond à une formule avec l'exponentielle. Je me mets donc à l'analyser dans l'espoir d'y voir un motif. La croissance semblait indiquer que la suite croit comme n!, n! = le produit des entiers jusqu'à n. $5! = 120 = 1 * 2 * 3 * 4 * 5$, donc naturellement en faisant le ratio de $\frac{a_n}{n!}$ on obtient une suite croissante comme n!, et en effectuant les différences entre les termes on obtient rapidement que la suite obtenue tend vers le nombre 1,54308063481524377847… J'arrive vite à trouver que le nombre est cosh(1), le cosinus hyperbolique de 1. La suite est très apparentée avec n! et la constante cosh(1). Il n'est pas difficile de remonter à l'envers pour trouver que la suite est générée par la formule $[\,n!\,cosh(1)] - 1$. Ici [ ] est la fonction plancher. Cette astuce en fait est devenue une méthode que j'utilisais à tour de bras. Elle porte un nom, c'est la méthode dite du *boot strapping*. Il y a plusieurs définitions de *boostrapping*. Cela fait référence aux aventures du baron de Münchhausenn, censé s'être sorti du marécage où il était embourbé en se tirant par les cheveux et en se propulsant ainsi dans les airs. Plus généralement, les *bootstraps* sont les anneaux, en cuir ou en tissu, cousus sur le rebord des bottes et dans lesquels on passe les doigts pour s'aider à les enfiler. Un autre exemple est donné par la suite

A006873, ce sont les termes du développement en série de la fonction

$$\frac{\sin(x) + \cos(3x)}{\cos(4x)}$$

Les termes de la série (exponentielle) sont : 1, 1, 7, 47, 497, 6241, 95767, 1704527, 34741217, 796079041,…
On calcule le ratio a_{n+1}/a_n et on effectue les différences entre 2 termes. Ça tend rapidement vers la constante $8/\pi$. Une fois trouvée la constante on peut faire du rétro-engineering pour arriver à l'expression

$$a_n \approx (\mathrm{n}-1)!\, 8^n/\left(2\, \pi^n \sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$$

En poussant plus loin le raisonnement j'ai réussi à en craquer une qui m'a pris une bonne semaine, la suite A000266 du catalogue OEIS, elle se lit comme suit : C'est le développement en série de la fonction $\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{1-x}$, elle commence par 1, 1, 1, 3, 15, 75, 435, 3045, 24465, 220185, … Après d'intenses calculs j'arrive à une formule exacte avec la fonction plancher (les crochets).

$$a_n = \mathrm{n}! \frac{\left[\frac{\left[\frac{\mathrm{n}}{2}\right]! 2^{\left[\frac{\mathrm{n}}{2}\right]}}{\sqrt{e}} + {}^{1}\!/_{2}\right]}{2^{\left[\frac{\mathrm{n}}{2}\right]} \left[\frac{\mathrm{n}}{2}\right]!}$$

J'étais convaincu après cet exploit qu'on pourrait éventuellement trouver toutes les formes exactes de toutes les suites du OEIS en utilisant des constantes, n et la fonction plancher ou arrondi. Mon idée était que les constantes mathématiques contiennent une infinité d'information. Chacune des constantes comme π, le

nombre e, le nombre d'or sont imbriquées dans des structures abstraites. Pour le nombre π c'est évidemment le cercle mais aussi pas mal d'autres phénomènes ou structures. Par exemple de nombreuses fonctions arithmétiques en théorie des nombres sont moyennées par π. Le nombre moyen de représentation de n comme somme de 2 carrés est π, la moyenne pour 3 carrés est $4\pi n/3$. Le somme des diviseurs d'un nombre est en moyenne $n\pi^2/6$. Il existe aussi d'autres moyennes reliées à la théorie des nombres qui utilisent la constante d'Euler-Mascheroni : γ (rencontrée plus haut). En fait, si avec une astuce on réussit à trouver une formule exacte pour une suite a_n, c'est qu'il y a un saut quantique, un changement de paradigme. Comme je le disais plus haut, les nombres ne tiennent pas compte des théories qui expliquent une suite ou une constante. Les constantes existent indépendamment des théories et des complications de calcul. Les nombres réels n'ont pas d'état d'âme.

Pour ce qui est des nombres premiers j'ai même pensé que ce modèle qui utilise la constante π, n!, et possiblement des nombres algébriques tenait la route. Si on prend un peu de recul, les cas les plus spectaculaires sont ceux qui sont avec les nombres d'Euler. En effet, le plus grand connu est E_{510}, un nombre premier de 1062 chiffres et dont l'approximation par π est $\frac{4\cdot 2^{510}\cdot 510!}{\pi^{511}}$ et précise à 243 décimales. Mais il y a bien plus, étant donné que $E_4 = 5$ et $\frac{4\cdot 2^{5}\cdot 4!}{\pi^{5}}$ = 5,019284… et que $E_8 =$ 1385 = 5· 277 ça signifie que c'est $E_4 \cdot 277$, donc que

$277 \approx \frac{26880}{\pi^5}$, que si les facteurs d'un nombre d'Euler sont eux-mêmes des nombres d'Euler, ça nous donne une autre approximation pour un nouveau nombre premier. Mais d'où viennent ces nombres au juste ? Il y a plusieurs réponses possibles, numériquement ce sont les coefficients du développement en série de Taylor de la fonction 1/cos(x). En effet on a,

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2!\,x^2} + \frac{5}{4!\,x^4} + \frac{61}{6!\,x^6} + \frac{1385}{8!\,x^8} + \frac{50521}{10!\,x^{10}} + \cdots$$

En ne tenant en compte que les coefficients au numérateur on a bien les nombres d'Euler. On a le même phénomène avec une autre du même genre qui est

$$\frac{\sin(x) + \cos(3x)}{\cos(4x)} = A006873$$

Qu'on a vu plus haut et dont les termes de la suite sont : 1, 1, 7, 47, 497, 6241, 95767, 1704527, 34741217, …Encore une fois, on peut obtenir une approximation de chacun des termes de la suite par l'expression :

$$a_n \approx (\mathrm{n}-1)!\,8^n / \left(2\,\pi^n \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right)$$

Et quand le nombre est premier une bonne approximation de ce dernier et avec le même raisonnement, le nombre 95767 = 7· 13681 nous permet de trouver l'approximation de 13681 étant donné que pour 7 on l'a déjà.

Petit à petit, on peut construire une table des nombres premiers systématique à partir de 2 et ce *ad nauseam*. Il y a énormément (une infinité) de ces expressions avec

des cosinus, sinus ou tangente qui permettent de fournir autant de nombres candidats pour une approximation d'un nombre premier. De plus, les tables peuvent être croisées : un nombre premier venant d'une suite donnée peut être utilisé pour une autre. Je dirais qu'à la limite on peut générer une approximation viable pour tous les nombres premiers à condition d'en faire l'inventaire évidemment. À mon avis c'est limité par le calcul uniquement.

Deviner une formule

Au moment de faire mon mémoire de maîtrise en 1990 j'avais déjà le programme Maple qui permettait de trouver une fonction qui génère une suite. Le plus simple exemple est la suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,… La façon classique de générer la suite est d'utilise la formule de récurrence avec un programme. Ici on sait qu'un terme de la suite est la somme des 2 précédents. Plus mathématiquement c'est $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Mais si on a que la suite, comment faire pour trouver cette récurrence. Ici elle n'est pas difficile à trouver à la main bien sûr. Mais qu'arrive-t-il si la suite est bien plus compliquée ? En fait, il y a plusieurs représentations de la suite de Fibonacci, l'une d'elles est le développement en série. En effet, la formule

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \cdots$$

Ce développement en série est simplement la longue division, appelée division euclidienne de 1 et de $1 - x - x^2$. C'est la même chose que la longue division avec les entiers mais avec un *index* qui est x. Mieux encore la formule $\frac{1}{1-x-x^2}$ est en fait la formule de récurrence en déguisé, mathématiquement c'est équivalent. C'est là que Maple entre en scène, il peut prendre n'importe quelle suite de nombres entiers et en tirer une fraction rationnelle ou si vous voulez une expression du même type que celle de Fibonacci. Ça fonctionne même si on prend une suite que l'on sait impossible à représenter avec ces expressions. Le

meilleur exemple est la suite des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, … Si on demande à Maple de trouver une expression, il la trouve en un court instant de réflexion. Si on prend les 12 premiers nombres premiers et que l'on transforme la suite sous forme de série ça donne : $2x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 11x^5 + 13x^6 + 17x^7 + 19x^8 + 23x^9 + 29x^{10} + 31x^{11} + 37x^{12}$

Maple répond alors, la série demandée correspond à cette expression au plus simple.

Elle est valide jusqu'au 12ème terme.

$$\frac{2x - \frac{x^2}{9} - \frac{11x^3}{9} + \frac{73x^4}{27} + \frac{167x^5}{54} - \frac{319x^6}{54}}{1 - \frac{14x}{9} - \frac{7x^2}{9} + \frac{157x^3}{54} - \frac{25x^4}{27} - \frac{73x^5}{18} + \frac{37x^6}{9}}$$

On réalise bien sûr que si on prend 13 termes, l'expression grossit, elle grossit plus vite que la suite au départ. Avec 16 termes on a :

$$\frac{2x + \frac{435x^2}{151} + \frac{646x^3}{151} + \frac{391x^4}{151} + \frac{708x^5}{151} + \frac{479x^6}{151} + \frac{384x^7}{151} - \frac{526x^8}{151}}{1 - \frac{9x}{151} - \frac{41x^2}{151} - \frac{249x^3}{151} + \frac{31x^4}{151} + \frac{27x^5}{151} - \frac{54x^6}{151} - \frac{80x^7}{151} + \frac{306x^8}{151}}$$

Ça ne fonctionne pas. Ça marche oui mais l'expression est de plus en plus grosse. Autrement dit, on n'y arrivera pas. Ce problème est connu, on ne peut pas représenter les nombres premiers (sous forme de série) avec des expressions en fraction rationnelles comme celles de Fibonacci, c'est impossible. On remarque aussi que le degré de la dernière expression est de 8 sur 8, donc 16 en tout, comme le nombre de termes demandés. Ça veut donc dire que si on prenait les nombres premiers jusqu'à 1000 on aurait une expression de degré 84 au

numérateur et de degré 84 au dénominateur, c'est loin d'être viable. Pour les curieux, si on le fait quand même avec la suite des premiers jusqu'à 1000 (il y en a 168), l'expression a plus de 31200 caractères et les coefficients ont 90 chiffres chacun. Ce programme Maple est une perle de programmation en fait. Ça répond en moins de 1 seconde quelques soit la suite donnée, tellement qu'en fait en prenant en compte la longueur de la suite au départ et la réponse et en comparant les deux on peut rejeter ou accepter la réponse assez rapidement. Ici avec les nombres premiers, sans surprise la réponse n'est pas validée. Évidemment, devant un tel programme j'ai immédiatement passé toute la table que j'avais à l'époque dans la moulinette. Il y eut quelques surprises, entre autres la suite des merveilleux nombres de Demlo. Voici à quoi ils ressemblent :

1
121
12321
1234321
123454321
12345654321
1234567654321
123456787654321
12345678987654321
1234567900987654321
123456790120987654321
12345679012320987654321
1234567901234320987654321
123456790123454320987654321
12345679012345654320987654321

12345679012345676543209876543211
1234567901234567876543209876543211.
…

Vers 1991, j'ai donc passé toute la table et découvert qu'en fait cette suite était simplement générée avec la formule, c'est la suite A002477.

$$\frac{x(1+10x)}{(1-100x)(1-10x)(1-x)}$$

Je m'empresse alors d'envoyer à Neil Sloane pour lui en faire part. Il était surpris et ne croyait pas une seconde que ça pouvait être aussi simple, après vérification il a admis malgré lui que c'était bel et bien la bonne réponse. Le nom de Demlo a été trouvé par le mathématicien Kaprekar, c'était un amateur comme tel mais il a fait quelques découvertes intéressantes dont la fameuse constante 6174 qu'on appelle la constante de Kaprekar. Si on prend un nombre de 4 chiffres et qu'on place les chiffres dans l'ordre croissant et décroissant on obtient en faisant la différence une constante qui est toujours 6174 éventuellement. Comme avec 5294, il devient 9542 et l'autre est 2459, en faisant la différence on trouve 7083 qui devient 8352 qui devient 6174. La constante est bien sûr qu'on arrive toujours à 6174. Demlo est le nom d'une gare à 30 km de Bombay et Kaprekar raconte que c'est en arrivant à cette gare qu'il a eu l'idée des nombres, le nom est resté.

En passant toute la table disponible à ce moment le programme Maple réussit à trouver une formule sur

25% environ des suites, ce qui était spectaculaire à l'époque. Même aujourd'hui que la table des suites en compte plus de 371 000, la proportion de formules trouvées est à peu près la même. En gros, il y a 4 modèles de formules.
Le premier modèle est que la suite est générée par une fraction polynomiale comme celle de Fibonacci. En effet, si on

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots$$

On reconnait les coefficients facilement comme étant bel et bien les nombres de Fibonacci. C'est la division au long qui permet de trouver ces nombres. À peu près 15 % de toutes les suites sont de cette forme.
Le 2ème modèle est celui des récurrences, ici la récurrence pour les nombres de Fibonacci est la même que la fraction avec un polynôme, c'est la façon de la lire qui est différente. Si $a(n)$ est un terme de la suite alors

$$a(n) = a(n-1) + a(n-2).$$

Chaque terme est la somme des 2 précédents. Les récurrences par contre peuvent aller bien plus loin dans la complexité. Dans le cas de Fibonacci les coefficients de la récurrence sont des entiers. Mais si on remplace les entiers par un polynôme l'étendue de ce qui peut être décrit est bien plus vaste. Déjà on couvre 20% des suites avec ces 2 modèles, le 2ème modèle contient le premier en fait. Il y en a 2 autres mais je ne les décrirai pas. Au final, 25% des suites contenues dans la table au moment de la sortie du livre des suites avait une formule qui générait la suite. Ce qui est important de comprendre est que ce qui fait le succès d'un modèle est finalement le

nombre de *hits* par rapport à toute la table. Il existe beaucoup d'autres modèles qui ont été essayés mais si un modèle ne fournit que quelques exemples ça ne fait pas le poids.

Un des modèles qui a été exploré est basé sur une variation élémentaire d'une suite. Par exemple avec Fibonacci on peut très bien considérer la somme des termes jusqu'à un certain seuil, ici ça nous donne la suite

$$1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, \ldots$$

Mais en regardant de près on voit qu'en fait ce n'est que la suite de départ moins 1. Mais est-ce important ou significatif ? La réponse est oui et non. Oui parce que la suite est générée par la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-x-x^2)(1-x)}$$

Donc, de faire la somme jusqu'à un certain point donne une nouvelle fraction rationnelle avec un facteur en plus. Au moment de faire mon mémoire de maîtrise j'avais concocté un programme qui faisait une bonne centaine de variations du même genre. En même temps, de se rendre compte que le jeu ne valait pas la chandelle parce que ça produisait beaucoup trop de faux positifs, une tonne de fausses pistes. J'avais quand même pris soin d'essayer de trouver les quelques perles mais au final cette méthode qui fournissait plein de candidats potentiels n'était pas très intéressante. Ça ne produisait rien de nouveau. Neil Sloane par la suite a repris mon petit programme et a étendu l'exercice à d'autres elles font partie de la panoplie de programmes d'analyse des

suites maintenant. Quand j'ai contacté l'UQAM pour mon projet de livre avec Sloane le premier contact a été assez désastreux. Sur place ils avaient un programme assez avancé appelé Darwin programmé en langage LISP. C'était en principe le graal pour la combinatoire. La combinatoire est la science du comptage d'objets dans une très grande variété de contextes. Je reprends ici les éternels nombres de Fibonacci. En combinatoire on les interprète entre autres comme étant le nombre de façons de monter un escalier en prenant 1 ou 2 marches à la fois. Si l'escalier a 13 marches il y a alors 377 façons de monter l'escalier et 377 est le 13ème nombre de Fibonacci. Si on examine le triangle de Pascal (vu plus haut), le nombre de façons de compter quelque chose explose littéralement. Il y a tellement de formules, interprétations et contextes différents juste pour les nombres de Fibonacci qu'un mensuel a été créé en 1963 pour justement étaler tout ce qu'il y a à propos de ces nombres qui touchent à un peu tout. Sur la page du OEIS, la suite A000045 compte des centaines d'articles, de formules et d'interprétations de ces nombres. La même chose avec le triangle de Pascal. Ce programme Darwin était capable en principe de digérer tout ça et de fournir des formules, des relations et possiblement des découvertes. Et moi qui arrivait avec un programme numérique, que des chiffres et des séries. Il y a eu un choc culturel en fait. Cet outil Darwin n'a en réalité jamais décollé. Ça n'a rien produit de nouveau, c'est à peine s'il fonctionnait tellement qu'au final ce projet a été abandonné. C'était une usine à gaz. Le changement de paradigme était en fait Maple avec des routines

numériques très avancées et adaptées pour gratter des séries et des suites. C'était un programme de calcul numérique mais aussi symbolique, un tout-terrain mathématique. Une des premières choses que j'ai fait avec ce programme quand j'ai eu la chance d'en avoir une copie sur mon Mac à la maison a été de taper

sum(1/n^3, n=1..infinity);

Qui décrypté veut dire: fait la somme de 1 à l'infini de l'inverse des entiers au cube et dis-moi quelle est la réponse.

Le programme hésita 1-2 secondes et écrit à l'écran : Zeta(3). Là j'étais impressionné, le programme était capable de passer à l'infini, évaluer un machin symbolique et dire : oui cette somme infinie converge et la réponse exacte et symbolique est la fonction Zeta évaluée en 3. Si on veut une réponse numérique à 10000 décimales on demande alors d'évaluer en 'point flottant'. C'était la première fois que je voyais quelque chose qui allait bien plus loin qu'une calculatrice scientifique. Ça a donné un coup d'accélérateur au projet que j'avais des suites. En fait, mon ami François Bergeron qui était l'apôtre de ce programme Darwin a immédiatement sauté dans le train en marche. Ça n'a pas trainé, quelques mois plus tard on faisait un article ensemble sur des techniques qu'on avait mises au point pour casser ou craquer des suites et ça marchait drôlement bien et vite. François a mis du sien et on a imaginé des modèles assez avancés de transformations qui ont permis de casser de gros morceaux réputés difficiles et qui mathématiquement rejoignaient déjà les techniques mathématiques les plus avancées pour 'compter' en

combinatoire, c’était une vraie révolution. Par la suite, nos petits programmes ont été intégrés dans la bibliothèque standard du Maple et Mathematica. C’est l’une des raisons à mon avis pour lesquelles ce projet Darwin est enterré. Ça c’est l’évolution j’imagine. Sur Maple le programme s’appelle GFUN. Il y a des centaines d’articles qui ont été écris où le programme a joué un rôle, j’en ai compté 431 sur le site ArXiv. C’est maintenant un incontournable de la combinatoire. Pour le OEIS (le site des suites) j’en ai compté 19251. Disons qu’on peut dire maintenant que ça couvre assez large.

Chapitre 4

Un tableau périodique pour les nombres réels

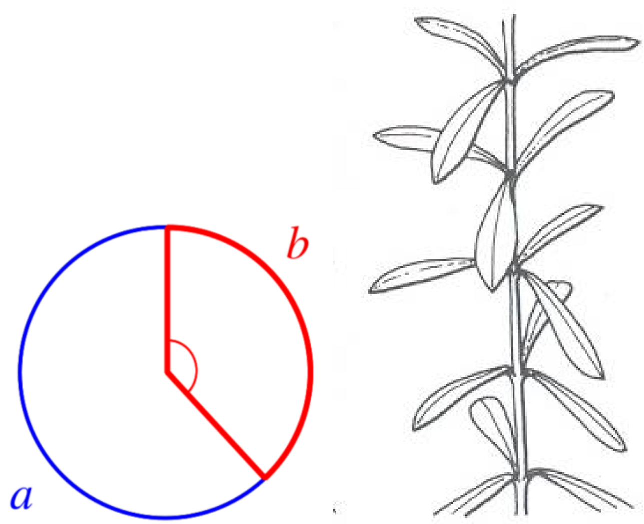
L'idée d'un modèle universel des nombres est séduisante. Trouver un ensemble de constantes mathématiques qui génèrent tous les nombres réels, une table des éléments comme avec le tableau de Mendeleïev. J'avais publié en 1996 une collection de constantes sur internet : *Miscellaneous Mathematical Constants*, ce n'était pas un livre comme tel, c'était une liste de base de celles qui existaient dans mon inverseur mais avec une grande précision. Ne sachant pas comment ça pouvait être publié j'ai contacté les gens responsables du projet Gutenberg aux États-Unis pour leur faire don de cette table pour qu'elle devienne un document du domaine public. Le projet Gutenberg est une collection de documents électroniques sous forme de texte plat, texte plat veut simplement dire que le fichier est en format texte ordinaire. Ils acceptent donc mes documents, j'en avais 5 en tout. Les constantes de base à grande précision, les nombres de Fibonacci jusqu'à 1001, les nombres d'Euler (une suite importante), les nombres de Bernoulli, etc. Au même moment, un certain Stephen Finch met sur internet une série de pages web consacrées aux constantes mathématiques. On avait le vent en poupe à propos des constantes. Plus tard, Stephen Finch publie un livre sur

les constantes mathématiques, il en avait plus de 4000. L'exemple le plus connu de constante mathématique dans le grand public est le fameux nombre d'or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,6180339887… On le voit presque partout sur tout ce qui pousse sur la terre. Il a été estimé que plus de 90% de ce qui pousse est tributaire de cette constante. Le nombre d'or est associé à la suite de Fibonacci de la façon suivante. La suite de Fibonacci est 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … il n'est pas difficile de trouver que chaque terme est la somme des 2 derniers, i.e. que 34 = 13 + 21. Si on fait le ratio de chaque terme sur le précédent on voit vite un motif se dessiner.
En effet,

Parmi ces espèces (la liste est longue), il y a les laitues, la chicorée, le topinambour, le tournesol, absinthe, estragon, soucis, l'artichaut, le cardon, les salsifis…

Mieux encore, par exemple pour la banane on compte 3 sections, la pomme contient 5 sections. Le tournesol (famille de la marguerite) quant à lui a 34, 55 ou 89 spirales dans un sens et dans l'autre. Mais alors pourquoi ces nombres apparaissent-ils aussi souvent sur les fleurs ou les plantes ? La raison est mathématique, c'est une question d'efficacité. En regardant de près au centre d'une fleur de tournesol on remarque que c'est bien agencé, les graines sont disposées de façon harmonieuse, très serrées et sans aucune perte d'espace. Justement c'est le point. Imaginons par exemple une plante verte ordinaire qui pousse et qui fait des branches, si les branches poussent

toujours avec le même angle comme 120 degrés alors il y aura 3 branches par tour et les feuilles du dessus seront privées de lumière. Si on compte le nombre de branches et le nombre de tours on obtient habituellement 2 nombres de la suite de Fibonacci. En fait la nature a trouvé elle-même l'angle optimal qui est de 137,507 degrés pour que chaque feuille reçoive de la lumière. Cet angle est tel que le rapport des longueurs est le nombre d'or. Ici c'est le ratio ou rapport entre la longueur de a/b. L'angle que fait b est 137,507 degrés. Et surtout, c'est le seul angle optimal.

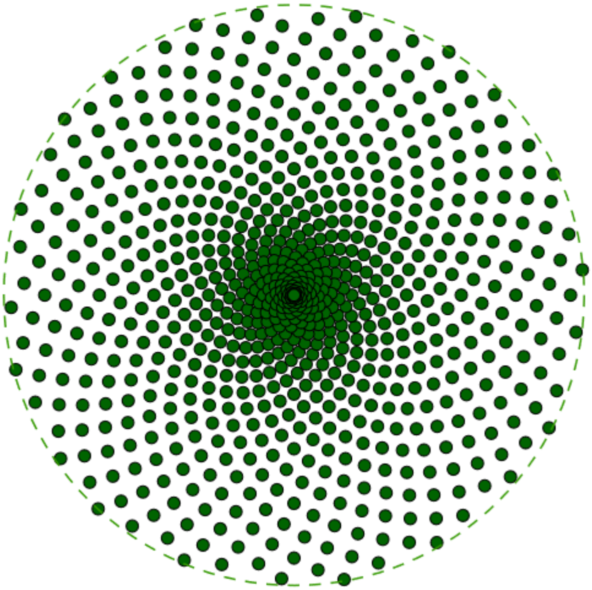


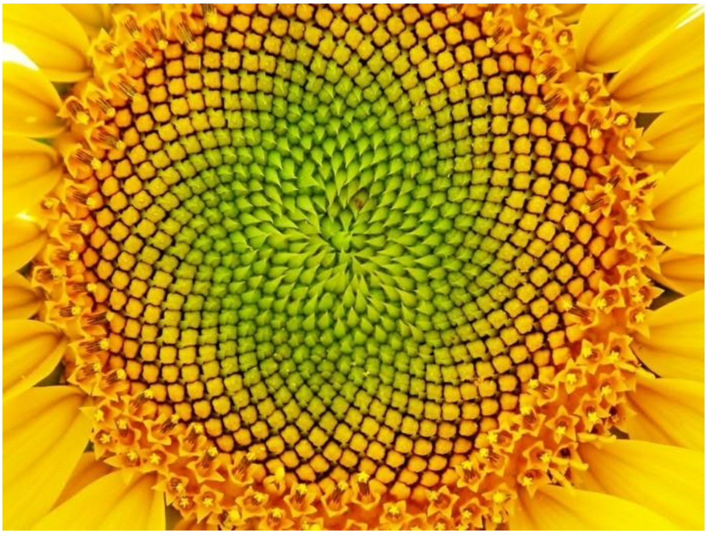
Quand le rapport de $a/b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, les feuilles d'une plante sont disposées de façon optimale, l'angle que fait b est alors de 137,507 degrés. Images de Wikipedia.

Cet angle de 137,5 degrés est le meilleur en fait pour que les graines (ici le tournesol) soient disposées de la

manière la plus compacte possible. La nature a pris des millions d'années à trouver cet angle, petit à petit. Les plantes ayant l'angle optimal se trouvant avantagées et par le principe de Darwin, ont mieux survécu. Non seulement on retrouve cette forme de spirale sur les plantes mais aussi dans la forme de notre galaxie.

La galaxie M51 vue par Hubble elle est similaire à la nôtre, image de Hubble.





Simulation numérique avec des graines disposée avec l'angle d'or : 137.507 degrés. Image faite avec le logiciel GeoGebra et centre de la fleur de tournesol on peut compter le nombre de spirales d'un côté et de l'autre

pour trouver 2 nombres de Fibonacci. Image de Wikipedia.

On ne peut qu'être émerveillé par cette simplicité et cette efficacité. Toutes ces formes dans la nature sont donc tributaires d'une seule et unique constante ? Les galaxies, le nautile, les marguerites ont la forme qu'on connait à cause de cette constante. Mais qu'en est-il du reste? On revient à la question de départ, mais c'est quoi au juste une constante mathématique et ça sert à quoi ?

Par exemple la constante du stationnement (Parking Constant) a été trouvée par Renyi en 1947. Elle est étrange cette constante. Si vous prenez une rue de taille assez grande et que vous disposiez au hasard des voitures toutes de la même taille au hasard sur cette rue. La question est alors, combien d'espace occuperont toutes ces voitures quand il n'y aura plus de places de stationnement ? L'espace occupé sera alors invariablement de 0,745 de la longueur de la rue. La rue sera remplie aux ¾ seulement. Cette constante on ne sait pas ce que c'est en fait. On ne connait que la valeur numérique obtenue de façon assez laborieuse et on ne sait pas du tout de quoi elle pourrait être constituée. Elle est isolée, unique, ce n'est pas une constante qui est racine d'une équation comme $\sqrt{2}$, ce n'est pas non plus un multiple de π ni une combinaison d'autres constantes connues. Donc si un tableau existait il faudrait qu'elle y soit incluse. Des constantes comme cette dernière, il en existe des milliers qui ne sont pas reliées entre elles. Le constat est que notre connaissance des nombres réels

est assez limitée. La tâche de construire un tableau des éléments des nombres réels est donc un projet très ambitieux. En 1993, j'ai commencé par les suites de nombres entiers qui faisaient partie du catalogue OEIS, il y en avait 5000 à ce moment.

L'hypothèse que j'avais formulée était simple, générer toutes les suites à l'aide de constantes. En effet, il semblait toujours possible de trouver une fonction simple qui n'utilise qu'une seule variable n et des constantes combinées ensemble pour produire la suite. Un exemple simple est la suite de Fibonacci. On peut trouver assez vite la formule suivante, si F_n est le nième nombre de Fibonacci alors

$$F_n = \left\{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Encore une fois, { } est l'arrondi à l'entier le plus près. Donc cette suite est simplement générée avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or bien connu.

Un autre exemple sont les nombres de Tribonacci, comme son nom l'indique chaque nombre est la somme des 3 précédents, elle se lit comme suit : 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, ... La bonne question était mais au fait si le nième nombre de Fibonacci est $\left\{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right\}$ alors qu'en est-il des nombres de Tribonacci ? J'ai farfouillé le problème numériquement et trouvé en fait la formule, la voici, si $T(n)$ est le nième nombre de Tribonacci alors on a

$$T(n+1) = \left[\frac{3(586+102\sqrt{33})^{1/3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(19-3\sqrt{33})^{1/3}+\frac{1}{3}(19+3\sqrt{33})^{1/3})^n}{4-2(586+102\sqrt{33})^{1/3}+(586+102\sqrt{33})^{2/3}}\right]$$

Ce n'est pas très élégant, tout le monde en convient mais c'est une formule qu'on dit close ou explicite. Elle est alambiquée et bizarre mais elle fonctionne. Ici [ ] est la fonction plancher ou floor en informatique : on tronque la partie décimale et on ne garde que les entiers. Je me suis rendu compte alors qu'avant moi cette formule était inconnue.

J'ai donc entrepris de trouver toutes les formules permettant de le faire, j'en avais une dizaine. Cela demandait pas mal de travail de rétro-ingénierie mais ça fonctionnait. Pour arriver à le faire j'utilisais mes tables de constantes et beaucoup de calculs. Ces formules font maintenant partie de la table des suites comme formules complémentaires. Ultimement je voulais même le faire pour la suite la plus importante à mes yeux : la suite des nombres premiers.

Pour arriver à fabriquer des nombres premiers avec des constantes il faut tout d'abord avoir un modèle. J'ai passé beaucoup de temps à y penser, pour y arriver il me fallait du recul, beaucoup de recul et j'ai trouvé quelque chose de viable. Le modèle est le suivant : Tous les nombres premiers sont approximés par une valeur de π et plus exactement, comme une somme des nombres irrationnels issus d'une série qui utilise π et la constante e. La constante e est l'exponentielle de 1, c'est le nombre 2,718281828459... bien connu. Elle est la 2ème constante la plus importante. Par exemple, 691 est un nombre premier et

$$691 \approx \frac{2^4 \cdot 11!}{\pi^{12}}$$

Et plus exactement,

$$691 = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{\pi n}-1} - 65536\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{4\pi n}-1}$$

$$17 = 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{7}}{e^{\pi n}-1} - 8192\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{7}}{e^{4\pi n}-1}$$

Et pour chacun de ces premiers une approximation peut être obtenue avec le nombre π,

$$3 \approx \frac{2^6\sqrt{2}}{\pi^3}, \qquad 11 \approx \frac{2^5\cdot 4!}{\pi^4}, \qquad 17 \approx \frac{2^2\cdot 8!}{\pi^8},$$
$$5 \approx \frac{2^6\cdot 4!}{\pi^5}.$$

Ces formules sont du même acabit que celles que j'avais trouvé pour π, à savoir que

$$\frac{1}{\pi} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{\pi n}-1} - 40\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1} + 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{4\pi n}-1}$$

$$\pi = 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{\pi n}-1} - 96\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{2\pi n}-1} + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{4\pi n}-1}$$

C'est à ce moment que je me suis dit : si le nombre π apparaît dans ces formules alors si on inverse la vapeur est-ce que ça peut donner des égalités avec les nombres premiers, la réponse est oui justement. C'est quand même étonnant d'obtenir une nouvelle formule de π,

dans la littérature il en existe des centaines mais celles que j'avais trouvé étaient nouvelles. Encore plus étonnant est que les mêmes séries donnent justement les nombres premiers. Quand on découvre un phénomène pareil, ça veut dire qu'on est sur un bon filon.

L'approximation étant liée à la formule avec les sommes. Le point d'exclamation est un raccourci pour le produit des n premiers entiers, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Dans ce modèle dans certains cas, plus le nombre premier est grand, plus la précision est grande. Un exemple est

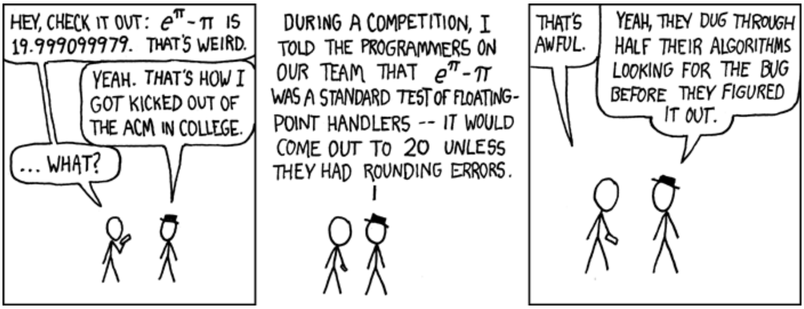
$$E_{510} \approx \frac{2^{512} \cdot 510!}{\pi^{511}} = 1{,}61184344 \times 10^{1061}$$

E_{510} est un nombre premier de 1062 chiffres et l'expression avec π est précise à 243 décimales. Le E est pour Euler, ce sont les nombres d'Euler.
Un autre exemple est

$$156344681616 \ldots 36059151 = 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{673}}{e^{2\pi n} - 1}$$
$$\approx 24 \frac{673!}{2^{674} \pi^{674}}$$

Qui est précise à 202 décimales et dans ce cas, l'expression avec la somme est exacte, le pointillé est une élision pour éviter d'imprimer 10 lignes de chiffres. Comme on le voit aisément, il y a une correspondance directe entre l'approximation avec le nombre π et la somme infinie exacte. Mais est-ce que ce modèle n'est qu'une curiosité numérique ? La réponse est non. Il fut une époque dans les années 70 et 80 où je collectionnais

les approximations et les curiosités pour voir s'il n'y avait pas un motif dans les chiffres. L'une en particulier a été notée et est maintenant relativement connue, elle apparaît même dans une bédé sur internet.



Trouvé sur le site XCD : https ://xkcd.com/217/

J'avais trouvé ça vers 1987 avec ma calculatrice HP-15c, et une fois à l'INRIA en 1992 je discutais avec le directeur des recherches (Philippe Flajolet et son équipe), et je lui mentionne comme ça que

$$e^{\pi} - \pi = 19.999099979 \ldots$$

Et que c'est curieux et surtout que je n'ai pas d'explications. Je n'ai toujours pas trouvé aujourd'hui. On a mis cette trouvaille sur internet après cette discussion. Ce phénomène n'est pas si rare en fait et on peut programmer un ordinateur pour en trouver, j'en ai des cahiers pleins, comme

$$\ln(163) \approx \frac{163}{32}$$

Qui est l'une de mes préférées, précise à 6 décimales. Quand on a une très bonne approximation d'une formule à des centaines ou des milliers de chiffres après le point décimal ça veut dire qu'il y a un phénomène auquel on touche. De plus ici, le lien entre la somme infinie et l'expression avec π est assez clair, ce sont les

mêmes coefficients ou presque, ça ne peut pas être une coïncidence. J'ai des exemples de 71399 chiffres mais c'est un peu trop volumineux à imprimer.

Ça voudrait dire qu'on peut représenter tous les nombres premiers de cette façon ? Pas si simple, dans certains cas la précision est spectaculaire mais dans d'autres cas on arrive à avoir une somme mais la précision avec π est moins visible. Par exemple avec 5 on a

$$5 = 84\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{\pi n}-1} - 132\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{2\pi n}-1} - 1152\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{4\pi n}-1}$$

Et pourtant, $5 \approx \frac{2^6 5!}{\pi^6}$, le lien ici entre la somme et le 5 est imprécis. Selon la somme je devrais obtenir que : $5 \approx \frac{963}{2\pi^4}$ mais c'est moins précis que la première. Ça fonctionne oui mais moins bien. Tout de même, on peut avoir une approximation d'un nombre premier avec ce modèle. Quand la somme pour un nombre premier donné contient 1 terme seulement, l'approximation avec π est excellente, un peu moins avec 2 termes et ça baisse en précision avec 3 termes mais c'est toujours valide.
J'ai fait une table des formules et des approximations obtenues et publié le tout en 2014 et un autre article en 2018, je n'ai pas eu de réactions. Je continue quand même à penser qu'il y a moyen de trouver une formule qui donne le nième nombre premier. Je n'ai pas encore

trouvé le motif parmi toutes ces formules mais c'est le genre de question qui me hante jour et nuit.

En 2018, je reçois un courriel de Montréal, un professeur de l'ETS veut m'inviter à parler de calcul symbolique au ACA 2019, le ACA est Applications of Computer Algebra. Je demande alors, quel est le sujet ? On me dit que je peux parler de ce qui est intéressant pour moi. Ça tombait bien j'étais en pleins calculs sur les nombres premiers. Ces conférences sont prévues 1 an à l'avance, c'était pour se ternir à l'ETS (école de technologie supérieure). Je choisis donc de parler des nombres premiers et entreprend de trouver une formule précise pour le nième nombre premier et le fameux $\pi(n)$. $\pi(n)$ est la fonction nommée pour le nombre de nombres premiers comme par exemple $\pi(1000) = 168$. C'est le nombre de nombres premiers jusqu'à 1000. Mais moi je m'intéressais plutôt à p_n, une formule pour le nième nombre premier, ça me semblait plus intéressant et surtout un challenge assez costaud. Ce que l'on sait sur les nombres premiers est curieux et inégal. Pour ce qui est de p_n, on connait la valeur jusqu'à 10^{26} et 10^{29} pour $\pi(n)$ et c'est tout. Pour les valeurs entre 10^{16} et 10^{26} *ou* 10^{29} , on ne connait que la valeur aux exposants de 10. La liste complète arrête assez vite à 10^{16} pour une raison bien simple : ça demande une pièce complète remplie de disques durs pour aller jusqu'à 10^{17}. Mais pourquoi s'était-on arrêté à 10^{26} pour p_n et 10^{29} pour $\pi(n)$. Ne peut-on pas calculer jusqu'à 10^{50} ? La raison est simple : on ne peut pas. Pour $\pi(10^{29})$ il a fallu plusieurs mois de calcul pour y arriver.

En gros, on a fait un crible d'Érathosthène très sophistiqué et rapide mais qui est quand même basé sur une grille de mots-croisés des nombres composés.

Chapitre 5

La Mer des Nombres Réels

Voilà l'image, les nombres réels c'est comme un vaste océan, les nombres rationnels sont comme les grains de sable sur la plage et nous on est les fourmis. Il y a plusieurs réalités en mathématique et toute ma vie de fouilleur de chiffres j'ai toujours été confronté à cette évidence. La réalité théorique et la réalité numérique, évidemment je ne m'intéresse qu'à la 2ème. Une fois au début des années 90, un matheux me demande, alors Simon, te voilà engagé à la 2ème édition du livre de Sloane, ça te suffit comme programme ? J'ai dit un oui enthousiaste, je lui réponds, tu sais toutes ces suites, tous ces domaines auxquels ça touche, la complexité de toutes ces formules me suffit largement, j'ai de quoi étudier pour le restant de mes jours. Les autres domaines des mathématiques m'intéressent aussi mais si ce n'est pas visuel, géométrique, ou amusant, je n'ai juste pas le temps de regarder à quoi ça rime en fait. Je suis allé en 2019 pour donner une conférence à l'ETS pour un congrès et j'ai surtout parlé de calculs numériques bien sûr et il y avait les autres conférences. Par curiosité je suis allé à une qui parle de Combinatoire Algébrique. J'ai écouté patiemment et comme toujours je n'y comprends absolument rien. Je ne vois pas du tout ce qu'ils cherchent en fait. Souvent on me demande, mais vous êtes donc chercheur en mathématiques ?, je réponds maintenant : Non, je suis trouveur. Je trouve

des formules, chercher est intéressant oui mais si c'est pour produire des articles qui prouvent des trucs qui sont en hébreu pour moi ça ne m'intéresse pas du tout, je cherche une formule explicite, un résultat clair et évident. C'est simple, je veux trouver une formule qui donne les nième nombre premier. Je reviens à la motivation qu'Einstein décrivait dans sa jeunesse. Il s'est posé une simple question et a tenté d'y répondre, il a construit un argument suffisant pour arriver à expliquer ce que l'on voit quand on voyage à la vitesse de la lumière et qu'on regarde un photon.

Cette réalité pour la rendre tangible il n'y a qu'une façon, c'est de la fabriquer soi-même. Toute ma vie, je n'ai fait que ça, trouver une question intéressante et une fois la réponse trouvée, à chaque fois je me dis mais en fait, pourquoi n'y a-t-on pas pensé avant ? La réponse je la comprends maintenant, c'est tout simplement que la question on ne se la pose pas. C'est le cas avec à peu près toutes les formules que j'ai trouvé, j'ai d'abord voulu trouver une formule à mon goût et fait en sorte de la réaliser, la rendre réelle, tangible. Un exemple est le résultat des 27 nombres premiers en progression arithmétique. Comme je le disais, ils ont pris un temps fou pour les trouver. En fait, à mon avis, c'est un blocage mental sur la question qui empêche le progrès. La preuve est que si on change la question : comment trouver une suite de premiers en progression *géométrique* ça devient bien plus simple à trouver, et j'ai trouvé. C'est bien plus intéressant, j'en ai trouvé une qui en donne 899 en 3 heures de calcul. On revient à la case

départ, c'est la question au départ qui est importante, après ça les moyens pour y arriver si on persiste avec la bonne question on arrive au résultat. Je me rappelle avoir lu Einstein qui expliquait d'où était partie son idée de la relativité générale et restreinte. Il disait, je me suis mis à la place d'un photon et j'ai cherché à expliquer, à m'expliquer, ce qu'on y verrait si on voyage à la vitesse de la lumière. C'est bien ce que je disais, l'important est la question au départ, il faut avoir assez de ténacité et de conviction pour persister à chercher une réponse satisfaisante. Quand je suis 'tombé' dans les chiffres vers 15 ans, j'ai réalisé que la réalité des calculs et la théorie étaient 2 choses différentes. Plus j'en aprenais et plus ce clivage entre les deux mondes était évident. Vers l'âge de 18 ans j'ai formulé une question simple et je me suis dit (j'avais lu Einstein déjà) : il faut trouver une façon d'avoir une formule qui donne la nième décimale de π. J'y suis arrivé en 1996, pas celle qui a été trouvée en 1995 qui donne π en binaire mais le procédé qui permet de le faire en base 10. J'ai publié mon article seul cette fois, je n'ai eu que quelques rares commentaires mais j'étais quand même assez fier d'avoir enfin pu répondre à ma question de 1974. Mon article a été repris par 2 mathématiciens qui en ont donné deux versions plus efficaces. J'avais eu un commentaire sur mon article de π en base 10, il trouvait que mon algorithme était *moot* (discutable en anglais). Je disais pourtant clairement dans l'article que le calcul est d'abord élémentaire, élémentaire au vrai sens du terme, j'expliquais comment additionner 2 fractions et qu'à cause de la complexité intrinsèque du procédé on arrive à aller chercher la

10000ème ou la millionième décimale au mieux, au prix d'un certain calcul mais que le procédé était réalisable quand même à la main ou avec une calculatrice à 4 opérations et une précision de 8 chiffres. Ce n'est quand même pas rien, l'algorithme pour la base 2 et la base 10 est basé sur la longue division qu'on apprend à la petite école. On peut l'expliquer à un enfant, je l'ai fait une fois pour vrai dans une école. Ça fait 2000 ans qu'on effectue des divisions et c'était la première fois que quelqu'un sautait la clôture pour trouver une façon numérique d'aller plus vite en utilisant le calcul à la main. N'empêche que maintenant, quand on calcule π on utilise ma formule en base 2 pour vérifier le résultat, c'est ce qui est encore arrivé en janvier 2020, 50000 milliards de décimales de π calculées de façon classique en binaire d'abord, ensuite la vérification en base 2 et ça se termine avec le passage en base 10 (le calcul est assez lourd). Le calcul de π est rendu maintenant à 105 000 milliards et on effectue toujours le test avec mon procédé.

Ça fait déjà plusieurs années que mon leitmotiv est d'abord de croire en mes intuitions, évidemment je me trompe souvent, je calcule dans mon coin à vérifier toutes ces intuitions, j'y passe le plus clair de mon temps. À la longue, on finit par s'aiguiser, on devient plus perspicace. On devine assez vite ce qui est faisable et ce qui ne l'est pas.

Je me compare souvent à Euler ou Ramanujan, loin de moi l'idée de comparer les talents et le génie de ces 2

piliers des mathématiques, je parle ici de la méthode de travail. Euler utilisait beaucoup cette espèce d'intuition numérique due à ses calculs et ne se trompait pas beaucoup, la même chose avec Ramanujan, la différence est que moi j'utilise des ordinateurs puissants qui effectuent (combinés) pas moins de 1000 milliards de calculs par seconde. Donc à chaque fois que j'ai une intuition au sujet d'un résultat, je vérifie d'abord mon inverseur. La deuxième étape est de vérifier que la suite ou nombre n'est pas déjà répertoriée dans le catalogue des suites ou une variante. Ensuite, je fais des jeux d'essai. Il m'arrive de représenter ces calculs sur des graphes, soit circulaires ou en rectangles. Encore une fois, la taille et l'étendue de ce qui peut être représenter n'a rien à voir avec Euler ou Ramanujan. Je peux en une seule image représenter facilement 10 milliards de décimales d'une constante, ou encore mieux une série d'images étalées sur des milliards de pixels. Si rien n'est trouvé je passe à la vitesse supérieure en utilisant mon programme favori : Maple. Maple est le programme de mathématiques tout-terrain qui contient des millions de lignes de programmes spécialisés pour ingurgiter des formules ou des chiffres. Ce n'est pas le plus puissant mais c'est de loin celui que je maitrise le mieux. Tout ça mis ensemble est 'mon' système de mathématiques à moi. Je peux dire que ça fonctionne à peu près puisque j'ai pu trouver quelques belles formules avec.

Un exemple frappant à propos de la différence entre le monde des solutions numériques et les

solutions exactes est : Quelles sont les racines de l'équation

$$x^4 - x^3 + 1$$

Ce genre d'équation se résous en une fraction de seconde avec un programme comme Maple et encore moins de temps pour la solution numérique. La solution numérique peut être calculée à la main en 10 minutes par une personne du niveau du Lycée. Le problème est que la solution exacte est horrible, il y a 4 solutions étant donné que le polynôme est du 4ème degré. La première solution est :

$$x \to \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\left(9 + i\sqrt{687}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{4}{\left(\frac{3}{2}\left(9 + i\sqrt{687}\right)\right)^{1/3}}\right)} -$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\left(9 + i\sqrt{687}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}} - \frac{4}{\left(\frac{3}{2}\left(9 + i\sqrt{687}\right)\right)^{1/3}} - \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\left(9+i\sqrt{687}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{4}{\left(\frac{3}{2}\left(9+i\sqrt{687}\right)\right)^{1/3}}}}\right)}$$

Les 3 autres réponses sont semblables mais avec de subtiles différences. Je ne connais personne qui soit capable de trouver cette réponse à la main. Celle-ci vient du logiciel Mathematica. J'ai pris cette équation parce que c'est l'une des plus simples qui soit du 4ème degré. Selon la théorie des équations, au-delà du 4ème degré il est impossible de donner une réponse exacte en utilisant des radicaux (racine carrées ou cubiques). Par contre, numériquement on peut aller jusqu'au degré 10000, 1000000, il n'y a pas vraiment de limite supérieure raisonnable. On peut tout trouver à une précision très grande en une fraction de seconde. Théoriquement, certainement que la possibilité de pouvoir résoudre une équation est intéressante mais à cause de l'explosion de

complexité, on est assez vite bloqué. Dans la mer des chiffres, le fait qu'un nombre soit difficile ou non à calculer est sans objet (*irrelevant* en anglais). Les nombres réels ne connaissent pas les limitations théoriques ou exactes, il n'y a que la réponse numérique sans état d'âme.

Lorsque j'écrivais mon mémoire de maîtrise en 1992 il se passa la même chose avec le programme GFUN, il était capable de trouver la formule qui génère une suite de nombres en moins de 1 seconde. C'est exactement le même paradigme, à partir des chiffres d'une suite numérique finie il 'devine' la formule. La fonction principale s'appelle d'ailleurs *guessgf*. À l'époque où j'ai présenté l'outil, les formules et les suites nouvelles qui avaient été craquées à Bordeaux début 1992 ça été un choc pour eux. À ce labo on faisait surtout de la combinatoire, la combinatoire touche à beaucoup de domaines et les calculs sont souvent assez lourds et très difficiles à prouver. Le raccourci incroyable que je proposais a très fortement séduit la communauté de mathématiciens (mathématiciennes aussi évidemment) sur place. Encore aujourd'hui je continue à trouver la formule à l'aide des programmes que j'ai mis au point, ma dernière mouture est une table de 105000 formules qui ont été tirées de la table des suites du OEIS.

En regardant des tables de valeurs des racines carrées il y a bien longtemps je tombe sur le nombre

$\frac{\sqrt{51}}{14}$, son développement décimal m'accroche l'œil. En effet c'est

$$\frac{\sqrt{51}}{14} = 0{,}5101020306102035\ldots$$

Et je trouvais ça étrange comme valeur, en plus si on enlève ½ ça devient 0.010102030610203 57… Tout de suite je reconnais ces nombres qui sont au centre du fameux triangle de Pascal. On peut les lire directement, ce sont les 2 colonnes du centre, en lisant en zigzag. Il y avait aussi $\sqrt{62} = 7{,}8740078740\ldots$ je trouvais curieux cette répétition de 7874 deux fois. Ces observations n'étaient pas anodines, il y avait une bonne raison sous la couverture.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Les premières lignes du triangle de Pascal

Ce triangle a d'innombrables propriétés. Tout d'abord on reconnait la première ligne diagonale de 1, ensuite la 2ème est n, la troisième est $n(n+1)/2$, la troisième est $n(n+1)(n+2)/6$. Ensuite chaque élément est la somme des 2 du haut, $10 = 6 + 4$, qui eux-mêmes sont $4 = 1 + 3$ *et* $6 = 3 + 3$. De nombreux livres, articles en tout genre ont été écris sur toutes ces

propriétés, la littérature est vaste. Si on examine 2 colonnes au centre on reconnait la suite aperçue au début du nombre. Elle se lit : $1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 35, 70, 126, 252, \ldots$ Cette suite est cataloguée dans la table OEIS, elle porte le numéro A001405. Par exemple ici la 3ème diagonale est 1,3,6,10,... ça compte combien de poignées de mains n personnes pourront se donner. Si n = 4 alors il y aura 6 poignées de main échangées. La page web qui donne toutes les propriétés, articles, commentaires et diagrammes divers. Elle fait 7 pages. Il y a plus riche encore comme la suite A000108 qui a plus de 24 pages de références. Les curieux pourront taper A000108 sur Google pour les consulter ou A001405 qui donne les 7 pages de formules en tout genre. L'une d'elles est

$$\frac{2x - 1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x(2x - 1)}$$

Mathématiquement ça dit que la suite A001405 est générée à l'aide de cette formule (en faisant varier x). En revenant au nombre du départ qui était : 0.01010203061020357... on s'aperçoit qu'il y des tranches de 2 chiffres. Numériquement ça veut dire que le x qu'on cherche est en fait 1/100. En effet en mettant $x = 1/100$ dans la formule on obtient bien le nombre $\frac{\sqrt{51}}{14} - \frac{1}{2}$. Ce que je viens de décrire est un raisonnement inversé. J'ai inversé le nombre $\frac{\sqrt{51}}{14} - \frac{1}{2}$ pour trouver la formule avec le radical. Ici la démarche était relativement facile puisque le début de la suite A001405 apparaît en clair. On peut faire la même démarche à partir du nombre 1,414213562... que certains

reconnaîtront comme étant $\sqrt{2}$ (ce n'est pas donné à tous de voir ça du premier coup). Mais maintenant qu'on est au parfum en fait, si on applique la même règle avec le nombre 1,414213562, on y voit la suite 14, 14, 21, 35, … qui divisée par 7 nous donne 2, 2, 3, 5, c'est mince comme indice par contre. Si on raisonne de façon plus large avec tous les nombres qu'on peut trouver dans la Mer des Nombres Réels, cette astuce est toujours possible. Quelques fois elle sera visible directement mais la plupart du temps malheureusement les chiffres sont complètement masqués et bien mélangés, la soupe est illisible même pour quelqu'un d'aguerri comme moi. Il en faut beaucoup plus pour arriver à programmer un engin avec du code en Maple qui arrivera à le faire à chaque fois, à ce que je ne sache personne ne s'est encore aventuré dans cette direction au sens large : décoder un nombre réel à partir de son développement en base 2, 10 ou autre base.

Par exemple, en partant d'un nombre réel on peut imaginer : quelle est la représentation de ce nombre avec des fractions les plus petites possibles ? On ne prendra que les fractions avec 1 au numérateur. Il est assez aisé de trouver ce développement à partir d'un nombre réel : on a seulement à calculer son inverse. Prenons $\pi - 3$ son développement est 0,1415926535… En faisant l'inverse on a 7.06251… Ce qui nous donne $\pi - 3 = \frac{1}{8}$, il reste alors à enlever ce résultat pour trouver le suivant, le calcul donne alor : $\frac{1}{\pi-3-\frac{1}{8}} =$ 0.01659265… donc que le prochain terme est 61. Petit à

petit on arrive à construire une somme de fractions les plus simples possibles qui représentent le nombre π.

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{61} + \frac{1}{5020} + \frac{1}{128541455} + \frac{1}{162924332716605980} + \cdots$$

Malheureusement ces nombres ne sont pas connus du tout. Quand j'ai trouvé ça en 1977 avec ma calculatrice HP 67, je n'avais pas le livre de Neil Sloane original sous la main mais elle y était. C'est dommage, ça aurait donné une série nouvelle pour π. La suite porte le numéro A001466 et on ne connait que les premiers termes. La taille des termes double (à peu près) à chaque étape. En d'autres mots, on arrive à extraire cette suite à partir de π mais on ne sait pas à quoi ça correspond, personne n'a jamais rien trouvé à ce sujet. J'avais essayé la plupart des constantes que je connaissais et suis 'naturellement' tombé sur l'expression pour $2 - \sqrt{3} = 0.267949192431122\ldots$ son développement est

$$2 - \sqrt{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \frac{1}{10864} + \frac{1}{408855776} + \frac{1}{579069776145402304} \ldots$$

Mais cette fois, les nombres 4, 56, 10864, 408855776, 579069776145402304, … ne sont pas inconnus. Ils sont reliés entre eux par une formule un peu tarabiscotée mais lisible. Cette astuce pour avoir le développement d'un nombre réel est appelé développement en fractions égyptiennes. Ils ont appelé ça égyptienne parce que les

égyptiens avaient l'habitude de représenter les quantités par des fractions simples. Le nom a changé depuis mais certains matheux comme moi continuent d'appeler ça fractions égyptiennes. Revenant donc à cette astuce qui d'un réel donne une suite possiblement intéressante, en y regardant de près en fait, ça demande un réel et une séries d'opérations avec 2 fonctions simples, la fonction plancher et l'arrondi, c'est noté [ ] pour la fonction plancher et { } pour l'arrondi. À partir de là on peut écrire que le développement en fractions égyptiennes d'un nombre x est donné par, ici on démarre avec x_0 et que celui-ci est compris entre 0 et 1.

$$y_n = 1 + \left[\frac{1}{x_n}\right] \text{ et } \; x_{n+1} = x_n - \left\{\frac{1}{y_n}\right\}$$

Les y donneront

$$x = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4} \dots$$

Mais encore, y aurait-il d'autres façons à partir d'un nombre x et trouver une suite intéressante ? J'en ai répertorié à peu près 1000. Ce serait un peu long de les expliquer ici. Il y a les développements classiques comme en base 2 ou 10, la base n! ou factorielle, la base factorielle alternée, la base 'produit égyptien premier', etc. Vous imaginez facilement l'explosion de suites et de chiffres que ça peut donner si on a une table de nombres réels qui en comporte 114,3 milliards ?

Encore une fois j'avais la nette impression avec mes tables et ces calculs d'avoir construit un radeau et de m'être aventuré seul sur l'océan pacifique muni d'une calculatrice, d'un bout de papier et d'un crayon. Une fois j'ai lu les œuvres de W. Sierpinski, un mathématicien polonais, j'arrivais assez bien à comprendre ses articles, un des tomes portait exactement sur ce genre de raisonnements. Il avait développé une série d'algorithmes tout bêtes pour exprimer les nombres réels comme suite de nombres. J'ai lu avec grand intérêt ce qu'il avait pu trouver. Les articles sur ce sujet sont rares. C'est comme si c'était un sujet tabou tellement que c'est mal vu des mathématiciens théoriques. Ayant déjà trouvé comment rendre la division très rapide pour les séries et découvert comment on pouvait l'appliquer à π j'étais convaincu après ça que même la simple addition n'est pas triviale. Je suis convaincu qu'on pourrait arriver à décoder directement un nombre à partir d'une représentation, j'appelle une représentation l'expression du nombre si on le développe en base 2, 10, base arithmétique, toutes celles que j'ai pu programmer. Voici un exemple assez simple de base 'naturelle' pour une constante.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$
$$= 1.64493406 \ldots$$

Donc, ce nombre qui est $\frac{\pi^2}{6}$ si on le représente dans la base $\frac{1}{n^2}$, son développement est 1,1,1,1,1… Maintenant en 2024, on sait que la somme des inverses des carrés est égale à cette constante mais à l'époque de Jacques Bernoulli on ne savait pas ce que c'était $\frac{\pi^2}{6}$, on ne connaissait que le développement décimal, c'est le grand Euler qui a trouvé ça bien sûr. On appelle ce problème le problème de Bâle ou de Mengoli qui a été le premier à le mentionner. Plus tard en 1741, Euler a donné une démonstration rigoureuse. Les preuves pour Euler ce n'était pas très important, mais à l'époque c'était la façon de faire, c'est bien plus tard que les preuves mathématiques ont fait leur apparition. Beaucoup des découvertes d'Euler ont été faites par un mélange d'intuition, de calcul surtout et bien sûr de génie. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens, comme Bach, Beethoven ou Mozart. Il savait calculer de tête assez bien et s'en servait comme guide pour ses découvertes mathématiques. Pour moi il est au haut de la liste. Dans mon école à moi, les plus grands mathématiciens sont Euler, Ramanujan ou Conway. Mais cette courte liste n'est pas celle de tous les mathématiciens, loin de là. Comme on se plaisait à le dire quand j'étais avec des camarades à l'UQAM (Université du Québec), il y a plusieurs églises dans le monde des mathématiques. Ce nombre $\frac{\pi^2}{6}$ dans le développement en base $\frac{1}{n^2}$ n'a que des '1' dans son développement. La question naturelle à se poser alors est d'essayer cette base pour d'autres nombres dans le

sens inverse évidemment. Ça ne fonctionne pas très bien, c'est comme de pousser sur une ficelle ou de couper un morceau d'une matière qui est liquide. Si on tente (pour faire simple) par exemple avec ½ avec cette base on obtient que :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{54^2} + \frac{1}{519^2} + \frac{1}{59429^2} + \cdots$$

Ça fonctionne oui mais ça ne donne rien de reconnaissable, cette suite ne correspond à 'rien'. Rien veut dire que les programmes automatiques, l'analyse sommaire, les tables connues ne retournent aucun résultat, c'était une idée simple et élégante mais une fausse piste. Heureusement, l'ensemble des ordinateurs dont je dispose me permettent d'effectuer plus de 1000 milliards d'opérations par seconde, ça permet d'écarter les fausses pistes assez rapidement.

Le problème est de taille, sur l'ensemble des nombres réels quels sont ceux qui ont un développement reconnaissable. Le système dans lequel les nombres sont représentés est la base 10, quelques fois en base 2. Ce sont des bases simples qui sont faciles à manipuler mais il en existe potentiellement une infinité. Tout d'abord il y a les constantes fondamentales comme π et e, e étant la base des exponentielles qu'on peut écrire comme e^1 et qui est 2,71828182845… Après ces 2 fondamentales les directions sont multiples. La 3ème serait fort probablement le nombre d'or ou $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et

si on inclut cette dernière il y a bien sûr $\sqrt{2}$. À ce moment dans le classement, ça part en vrille. Dans le livre de Finch sur les constantes j'en avais compté 4000, plus de 11381 dans la table OEIS. Le OEIS étant constitué de suites numériques les entrées pour les constantes sont enregistrées comme une suite de décimales (habituellement en base 10 et 2). Pour π en base 10, la suite est le numéro A000796 et qui se lit 3,1,4,1,5,9,2,6,5,3,5,8,9,7,9,3,2,… Le problème est le suivant : En prenant les séries (sommes infinies) les plus simples qui représentent les constantes fondamentales on a de belles formules.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \ldots$$

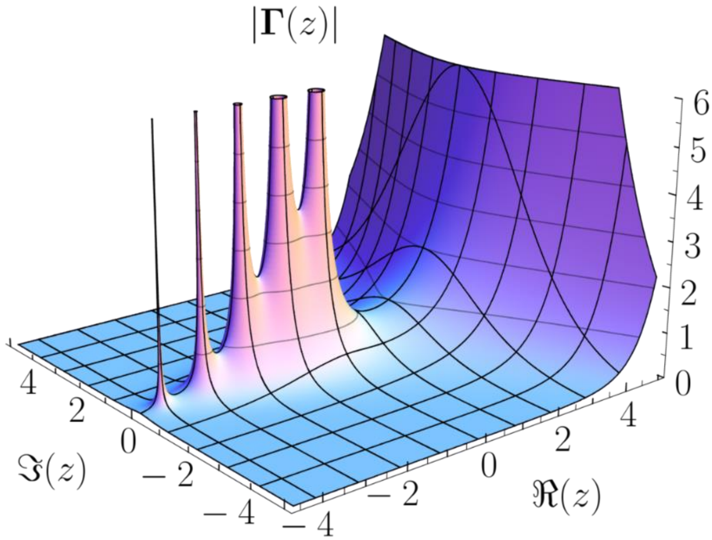
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}}$$

C'est bien joli mais si on tente de construire une fonction qui les contienne toutes les 3 en un seul système ou base, on y arrive. Après ça se gâte, en voulant y inclure une 4ème comme par exemple la constante d'Euler : γ, appelée gamma ou constante d'Euler-Mascheroni, sa valeur est 0,577215664901532…En anglais il y a une expression imagée qui dit : *This one is a tough cookie* ,elle est costaude. Elle est peu connue du grand public mais a son importance dans le domaine de l'analyse. Sa représentation en série comme avec π est biscornue. On

ne la connait que par une limite mathématique qui n'est pas tout à fait simple. Voici sa définition,

$$\gamma = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$$

C'est la série harmonique (somme des inverses des entiers) jusqu'à n à qui on enlève le logarithme de n. Et ce n'est que le début des embrouilles, la liste de Finch en compte plus de 4000, ma table de base au début en comptait 200, j'avais limité la casse au maximum. La table du OEIS en contient plus de 11381. Toutes ces constantes sont bien sûr incluses maintenant dans ma grosse table de 114,3 milliards d'entrées et cette dernière contient toutes les déclinaisons imaginables d'une unique constante. En gros ça dit qu'il n'y a pas de base universelle pour ces nombres. Dans la Mer des Nombres Réels on ne connait que les pointes d'iceberg, les trucs qui flottent au-dessus, on est loin de connaître les profondeurs abyssales. De grandes avancées ont été faites cependant avec Euler (le grand Euler), il a pondu cette fonction appelée Gamma (majuscule), notée $\Gamma(x)$, voici à quoi elle ressemble en 3D.



La fonction $\Gamma(x)$ quand x est complexe, en valeur absolue, c'est le grand Canyon. Image de Wikipedia.

Avec cette fonction j'ai vraiment cru qu'on pouvait représenter la plupart des constantes, le modèle est élégant, voici les valeurs de cette fonction pour les constantes classiques.

$$\pi = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma = -\Gamma'(1)$$

$$e = \Gamma(1, -1)$$

$$\sqrt{2} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi}$$

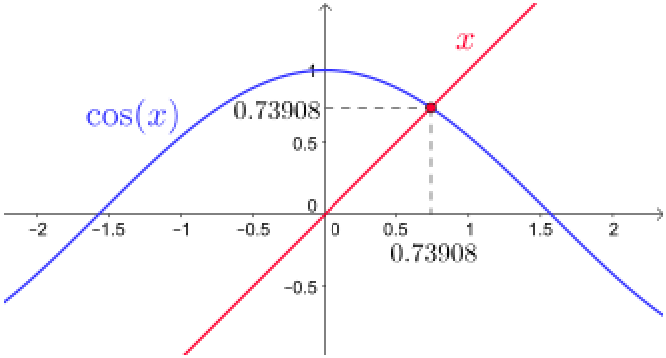
$$\sqrt[3]{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\pi\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

$$\ln(2) = \Psi(1/2) - \frac{1}{2}\left(\Psi\left(\frac{1}{4}\right) + \Psi\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

Et ici, la fonction Ψ est une variante de la fonction Γ. $\Psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ qui est la dérivée logarithmique, une cousine proche. Avec ces variantes de Γ on arrive à exprimer toutes les constantes classiques. J'appelais ça le modèle Γ, j'y ai consacré pas mal de temps à craquer des constantes tout en sachant qu'il n'était peut-être pas universel mais qu'au moins je pourrais y représenter la plupart des constantes classiques. Cette mystérieuse fonction Γ est en fait la fonction factorielle mais décalée de 1 pour des raisons techniques. En effet, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \Gamma(6) = 120$ et l'idée qu'Euler a eu a été d'étendre la définition du symbole ! ou factorielle aux nombres réels entre les entiers. C'était une fabuleuse intuition puisqu'on la retrouve partout maintenant.

Mais c'était trop beau bien entendu, ça couvrait passablement large mais il restait des constantes de base qui se montraient plutôt rétives. L'une d'elles était arc tangente (1/2) et $Li_4(\frac{1}{2})$ dont j'ai parlé plus haut et qui est reliée à l'électron. Voici une qui est très simple, c'est le nombre qui est la racine de l'équation :

$$\cos(x) = x$$



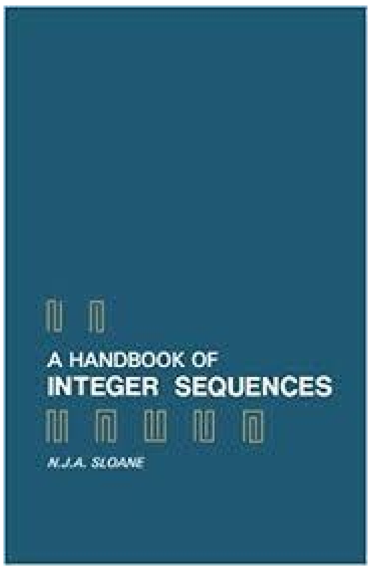
La valeur de la constante est l'intersection de la droite x et cos(x). Image de Wikipedia

On connait la solution numérique à une très grande précision, sa valeur est 0.73908513321516064165… on l'appelle le nombre de *dottie*. C'est la valeur de la constante lorsqu'on appuie sur le bouton COS d'une calculatrice à plusieurs reprises, en autant que ce soit en radians. Ça converge toujours vers cette valeur quelques soit la valeur du départ. On a récemment découvert une série qui le donne mais elle n'est pas simple du tout et bien sûr n'est reliée à aucune autre connue.

Chapitre 6

Le livre, les suites, l'internet

En 1973 paraissait un petit livre qui ne contenait à toute fin pratique que des chiffres, c'était *A Handbook of Integer Sequences* de N.J.A. Sloane des Laboratoires Bell aux États-Unis. Il contenait 2372 suites de nombres comme 1,2,4,8,16, … ou la suite dite de Fibonacci bien connue : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … un vrai trésor pour les matheux.



626 1, 2, 6, 14, 31, 73, 172, 400, 932, 2177, 5081, 11854, 27662, 64554
RESTRICTED PERMUTATIONS. REF AENS 79 207 62.

627 1, 2, 6, 14, 38, 97, 260, 688, 1856
GLYCOLS. REF JACS 56 157 34.

628 1, 2, 6, 15, 40, 104, 273, 714, 1870, 4895, 12816, 33552, 87841
FROM FIBONACCI IDENTITIES. REF FQ 6 82 68.

Le livre et un extrait, la suite 626, 627 et 628.

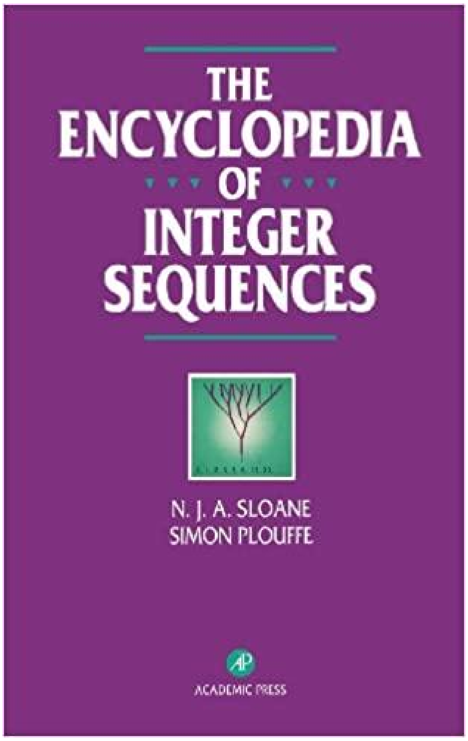
Un de mes amis Pierre Bouchard en avait une copie et un jour comme ça en 1986 il me dit : tu veux m’acheter mon livre ? Moi il ne me sert à rien du tout et toi qui aime les chiffres ça va t’amuser. Je trouvais que 10$ était un bon investissement. C’était à l’époque où je remplissais mes disquettes de constantes et le livre me servait de référence souvent. Bien plus tard en 1989 je me suis mis à entrer toutes les pages de ce livre dans mon ordinateur. J’avais commencé par utiliser un scanner et tenter de faire reconnaître les suites de nombres par l’ordi mais ça ne marchait vraiment pas bien. Alors moi et mon ami Danièle, à temps perdu j’entrais les chiffres sur l’ordi et patiemment on vérifiait à la main chaque suite. Ça a pris 6 mois. Une fois le travail complété un événement se produisit, on pouvait trouver le programme Maple pour le Mac Plus. Je me suis mis à faire des calculs avec ces suites. Maintenant équipé de mon disque dur de 60 mégas, je l’ai rempli de chiffres (jusqu’à la moitié), et je me disais et si on remplissait tout un gros ordinateur avec ces chiffres ça pourrait être intéressant ?

Une fois terminé, j’écris une lettre à l’auteur du livre : Neil Sloane, je lui disais que j’avais terminé d’entrer toutes les suites de son livre dans mon ordinateur et mis quelques commentaires sur des trouvailles que j’avais faites. Également mentionné les quelques erreurs typographiques ou de calcul sur certaines suites. Peu après, je reçu un coup de fil de

Sloane, j'étais à l'Hydro-Québec (équivalent de EDF) et il me dit que je m'étais donné bien de la peine puisqu'il avait bien sûr le fichier sur leur système Unix. Les laboratoires Bell était à l'époque la Mecque de l'informatique, mathématique est des laboratoires dont le nom seul couvre toute la largeur de la porte. C'est là qu'on a inventé le laser, les transistors, le système Unix et bien d'autres découvertes fondamentales. Il me dit aussi qu'il préparait une 2ème édition de son livre et m'a demandé si ça m'intéressait de le faire avec lui. Je suis tombé de ma chaise. Il m'a alors invité à son laboratoire au New Jersey. Il me dit aussi qu'il était temps qu'il fasse la 2ème édition parce qu'il avait reçu depuis le temps à peu près 1 mètre cube de lettres de partout dans le monde. Il m'a montré les cartes perforées originales du fichier de la table des suites sous son bureau. Je lui dis alors, mais Neil tu es célèbre comme Zsa Zsa Gabor ? Il a trouvé ça amusant. J'y suis resté 2 jours et on a passé en revue des vieux articles et quelques lettres.

Pour y entrer on doit déposer un cv et un dossier, il me dit comme ça, tu es le seul qui soit entré ici qui n'aie pas de doctorat. Il m'a fait visiter un peu et présenté à ses collègues, plusieurs étaient fameux, ils avaient des noms qu'on lit dans les bouquins de maths. J'ai rencontré le fameux Thomson, celui qui a programmé le premier jeu d'échec sur Unix appelé Deep Thought (pensée profonde). C'est ce programme qui plus tard, fortement amélioré a battu Kasparov en 1995.

Une semaine plus tard je décidai de démissionner de mon poste à Hydro-Québec et d'entreprendre un master en mathématiques. Je suis donc allé voir mes deux professeurs à l'époque leur faisant part de mon projet. Ils me répondent alors : mais Simon tu ne peux pas faire de Master en mathématiques, tu n'as même pas ton secondaire! (bac en France). C'est assez ironique puisque les livres de mathématiques du secondaire au Québec maintenant contiennent ma photo (voir appendice). Je recontacte Sloane et lui fait part de ma déception. Il me dit 'Ah oui ?', j'arrive à Montréal et de toute façon j'irai donner une conférence à l'UQAM et Concordia. Une fois arrivé, on part pour l'UQAM rencontrer mes deux professeurs, la conversation a été assez courte, il leur dit « Simon va faire son Master ici ». Ils ont répondu, « oui monsieur ». J'aurais donné 1000$ pour avoir un appareil photo pour garder un souvenir de la tête qu'ils faisaient. J'ai donc entrepris une collaboration avec Sloane pendant quelques années, à un moment donné j'avais calculé qu'on s'était envoyé 8000 courriels pour mettre au point la 2ème édition. Le livre a été publié en 1995 et ça été un succès immédiat. À ce que je sache, le livre est dans toutes les bibliothèques universitaires dans le monde. On n'était pas au bout de cette aventure du tout, ça ne faisait que commencer en fait.



Le livre sorti en 1995

Une fois le livre publié, on a convenu de mettre le contenu sur internet, Sloane demande alors à Academic Press si la publication du contenu comme une base de données sur internet les dérangeait, la réponse était pas du tout. On a ouvert donc un service par courriel en 1994 et finalement sur internet en 1995. Il contenait 5487 suites répertoriées. Chacune avec une référence, c'était la partie importante de ce recueil en fait. Pendant plus de 4 ans j'ai parcouru tout ce qu'il y avait d'articles disponibles dans les bibliothèques universitaires de Montréal à la recherche d'articles sur

le sujet des suites et surtout pour dénicher la perle rare. Là encore, le succès a été immédiat. C'est là que nous sommes passés de 2 collaborateurs à plus de 9500 personnes, le projet OEIS est devenu une référence incontournable des suites numériques, la quantité de références a explosé. On est passé de 2372 (1ère édition), à 5487 pour la 2ème édition et à l'heure actuelle le site comporte plus de 371000 suites. Le site est maintenant géré comme Wikipedia, c'est devenu un wiki comme ils disent. Le nombre d'articles qui mentionnent le livre ou le site est de plus de 11000, on en fini plus de trouver les références, tellement qu'une page sur internet y est consacrée. Le nombre de suites a augmenté de façon régulière depuis 30 ans à raison de 10 à 20000 par an. Le EIS du départ est donc devenu le OEIS (On-line) EIS. J'ai compté combien de fois Wikipedia renvoyait au site OEIS dans l'édition anglaise et française : plus de 18919 renvois.

Ce livre m'a rapporté un peu de sous quand même, on avait convenu moi et Sloane de partager 60-40 les redevances. J'ai dit oui bien sûr puisque Sloane était quand même la personne en qui j'avais le plus confiance et surtout il était l'auteur original du premier livre, ce qui n'est pas rien. J'ai publié 5 autres documents mais qui ont été donnés au projet Gutenberg sur internet. Étant donné que ce n'était que des tables de chiffres, ça n'avait pas vraiment de valeur, j'étais quand même satisfait d'avoir contribué à la diffusion de données mathématiques gratuites. Au cours des quelques années qui ont suivi et à partir de 2010 mes

documents ont commencé à apparaître sur Amazon et quelques autres sites. Ils vendaient mes livres sans m'avoir consulté et bien sûr je ne recevais rien en contrepartie. Je contacte alors un bureau d'avocats qui me disent essentiellement que j'avais le droit de poursuivre Amazon mais qu'il y aurait dans les 5000 euros de frais. Je contacté alors Amazon par téléphone mais c'est comme d'appeler dans le désert. J'avais mis une page sur mon site expliquant qu'ils étaient des voleurs, des bandits d'utiliser ces pratiques commerciales. En fait, ce sont des programmes robots qui ramassent tout ce qui traine sur internet et des groupes ou compagnies tierces en font un 'livre' et le vendent. Mais il y a un problème pour eux, le document en question une fois dans la banque de documents de Gutenberg a été publié avec un entête bien visible du projet et évidemment qui mentionne que le livre est du domaine public et qu'il ne peut pas être vendu. Ils ont donc enlevé cet entête. Bien plus tard en 2020, en fouillant sur internet je m'aperçois que mes documents sont en vente sur beaucoup de sites. Ils y étaient tous, Apple Books, Abebooks (une filiale de Amazon), Microsoft book store, la FNAC en France, Barnes & Noble de New-York, un bon paquet de sites. Là je décide d'appeler un bureau d'avocats et leur demande combien ça coute pour leur envoyer une mise en demeure, ça faisait 500 euros + 140 euros pour chaque lettre envoyée.

Devant la facture qui s'annonçait je décide de les joindre par courriel leur disant à peu près que ce

qu'ils faisaient était illégal et passible d'amende et de prison et que j'avais une belle cause dans les mains. Que j'avais contacté un bureau d'avocats et qu'ils attendaient mon accord pour leur envoyer une mise en demeure. Ça n'a pas traîné, ils ont tous accepté de retirer mes documents de leur site, l'un après l'autre. C'est surtout AbeBooks dont j'étais le plus fier puisque ce site appartient à Jeff Bezos en personne, l'un des plus riche de la planète. J'avais réussi à les faire plier. Aussi le magasin et site internet de Barnes & Noble de New-York, cette librairie est l'une des plus prestigieuses aux États-Unis. Je n'ai rien gagné avec tout ça, j'ai gagné en fierté pour moi.

Au cours du développement des outils pour le livre, en fait pour moi c'était aussi mon mémoire de maîtrise dont le sujet était justement les suites. Toute cette aventure est venue du fait qu'en 1990 il était possible d'utiliser des programmes Maple pour deviner une fonction. Le principe est relativement simple à énoncer, on donne une suite de nombres comme 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, et on cherche quelle pourrait-être la formule qui génère ces nombres (et les suivants).

En fait l'histoire remonte à Newton, c'est lui qui a mis au point des techniques de calcul permettant cette prouesse. Depuis tout ce temps, ces algorithmes ont été implantés dans ces programmes comme Maple. Un autre facteur important est que même en 1990, les ordinateurs équipés de Maple étaient quand même capables d'effectuer des millions d'opérations par

seconde. Mis bout à bout, l'ordinateur peut donner en une fraction de seconde que la suite 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22 est fort probablement générée par le polynôme $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1$. En 1992, la table comprenait environ 4500 suites, mon programme Maple permettait de trouver automatiquement près de 25 % des formules, 1031 formules trouvées sur 4568 suites. Mieux encore, ça a permis d'identifier des suites qui contenaient une erreur. Un professeur de l'UQAM et moi et 2 chercheurs de l'INRIA à Paris nous avons mis au point un outil magique appelé GFUN (*Generating Function*) qui faisait tout le calcul, toujours en une fraction de seconde. L'algorithme a finalement été implanté dans la librairie standard de Maple et aussi Mathematica. C'est même devenu l'outil pour le OEIS sur internet, il sert à valider les formules, et parfois même trouver une nouvelle.

Au même moment où je travaillais à la complétion de la table du OEIS, je consacrais tout mon temps à mettre au point mon inverseur. Cet inverseur qui était ouvert depuis juillet 1995 à Vancouver. Petit à petit je me construisais mon système de nombres, une table universelle des nombres codée avec les nombres réels. En simplifié, il existe deux types de nombres, les nombres entiers et les nombres réels. On peut représenter un nombre réel comme un entier et vice-versa. Il ne faut pas oublier que pour nous les nombres réels (avec un point décimal) n'est en fait qu'un gros entier mais qui a un pointeur décimal. Si on représente le nombre $\sqrt{2}$ = 1,414213… la précision sera forcément finie, dans ma table au départ en 1995, la précision était

de 41 chiffres décimaux mais pour l'inverseur sur internet la précision était seulement de 16 chiffres, ça suffisait à l'époque. Puis en 2003, j'ai décidé de passer à 64 chiffres décimaux. La quantité d'entrées n'a pas cessé d'augmenter depuis 1986, date à laquelle j'avais commencé à entrer des constantes sur mon petit Apple IIc. Maintenant la table contient 17.3 milliards de nombres à 64 chiffres de précision.
Voici ce que ça représente :

Chaque entrée est suivie d'un numéro de table et d'une description. Chaque table est classée selon le type, mon modèle utilise les 26 lettres de a à z.
a : constantes algébriques comme $\sqrt{2}$
b : constantes de base (petite table des constantes fondamentales).
c : Nombres réels construits avec des constantes simples
d : Constantes basées sur des variantes à la base 10 et l'écriture de gauche à droite.
e : Valeurs des fonctions elliptiques.
f : Fonction Hypergéométrique
g : Valeurs de la fonction Gamma et dérivées.
h : fonctions hyperboliques.
l : fonctions log et polylogarithmes.
m : Constantes mélangées comme $\frac{\sqrt{2}+1}{\pi+5}$.
r : nombres évalués par des récurrences.
s : suites transformées en nombre réel.
q : rationnels.
v : Séries infinies

w : Valeurs de fonctions transcendantes.
y : grands nombres entiers.
z : la fonction Zeta et tous ses cousins.
…
En tout près de 500 tables différentes. L'une des catégories est s pour Suites ou Sloane. Ce sont tous les nombres réels construits à l'aide de la table des suites du OEIS. On en compte 371000 en mars 2024. Avec ces 371000 entrées, plus de 5 milliards d'entrées ont été fabriquées avec cette base. Cette table s est l'une des plus importantes pour plusieurs raisons. La raison principale est que cette table contient tout ce qui est connu en mathématiques qui a pu s'exprimer sous forme de suite numérique. La variété et l'étendue des sujets couvrent (à mon avis) tout ce qui est connu en mathématiques. Tout ce qui a été inventé comme motif a des échos dans cette table, c'est assez vaste comme étendue. Compte tenu de son importance, j'y ai apporté le plus grand soin pour construire chaque entrée de la table des nombres réels. Un exemple, est la suite des carrés, 1, 2^2, 3^2, 4^2, ou 1, 4, 9, 16, … Cette suite porte le numéro de catalogue : A00290. Elle est importante bien sûr, donc pour ne rien manquer de la portée potentielle de la suite, et de toutes les 363999 autres. Chaque entrée de la table des suites donne environ 1000 nombres différents selon la base qui est choisie. Toutes les variantes connues y sont, y compris par exemple, le nombre 0,149162536, des carrés des nombres concaténés (tous collés ensemble). Il faut comprendre que les nombres tels que nous les connaissons sont habituellement exprimés en base 10 parce que nous

avons 10 doigts. On pourrait prendre la base 2 ou une autre sorte de base. Justement, c’est l’autre raison pour laquelle toutes ces entrées ont été fabriquées, pour ne rien manquer. Chaque suite a été réencodée en 1000 bases différentes.

Pour tester si mon système de nombres pouvait trouver quelque chose de nouveau, en 2003 j’ai pensé tenter une expérience. À l’époque, la table contenait 610 millions d’entrées et je me suis dit : et si j’essayais de trouver une expression mathématique pour une valeur précise ? La valeur précise est une constante connue des physiciens, c’est le rapport de masse entre le neutron et le proton. Cette quantité est une constante absolue, elle ne dépend pas d’unités comme le Kg ou l’once, c’est appelé une constante sans dimensions, la valeur est 1.00137841931, avec une imprécision connue sur les 2 derniers chiffres. On ne sait pas du tout ce que c’est. Les physiciens et certains mathématiciens ont tenté de trouver une expression simple pour ce nombre mais sans succès. Certains physiciens disent qu’il est illusoire de pouvoir trouver une expression mathématique exacte de cette constante, tous ne sont pas du même avis. Je me suis dit et si j’essayais d’en trouver une ? Loin de moi l’idée de prétendre expliquer quoique ce soit en physique, j’avais bien mis en garde dans un article où je décrivais la démarche. La démarche était de trouver l’expression mathématique la plus simple qui colle avec la valeur de la constante et qu’à défaut d’avoir une théorie pour l’expliquer, au moins arriver à une expression.

L'expression, j'en ai trouvé une, c'est

$$\frac{M_n}{M_p} = 1.00137841931$$

et

$$\frac{8}{27}\left(\frac{5}{\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)} - \sqrt{3}\right) = 1.0013784197963528 0 \ldots$$

C'est la plus simple et élégante qui a été trouvée, j'ai fait mouliner mes machines pendant 2 mois pour y arriver. Après je me suis mis à chercher une expression pour le ratio de masse entre le proton et l'électron.

$$\frac{M_p}{M_e} = 1836.15267343$$

et

$$\frac{1}{5\cosh(\pi)} + 6\,\pi^5 + \frac{1}{5\sinh(\pi)} = 1836.15267996686153 \ldots$$

Je ne prétends pas que ces expressions aient une quelconque réalité physique, simplement qu'elles sont élégantes et simples. Pour les profanes, les fonctions sinh et cosh sont le sinus et le cosinus hyperbolique. Le cosinus hyperbolique est la courbe des fils électriques tendus entre 2 pylônes. Il y a quelques années un physicien nommé Lentz avait pensé que cette valeur était $6\,\pi^5$ en 1951, on a longtemps pensé que cette trouvaille était due à Richard P. Feynman. Une

détermination de la valeur physique plus précise a infirmé cette hypothèse. Plus tard, le mathématicien I.J. Good a formulé un ensemble de 8 formules pour cette valeur. Celle présentée ici est la plus précise.

Chapitre 7

Vancouver et la formule de π

Début 1993, je suis à Bordeaux à l'IUT. J'avais déjà communiqué avec les responsables du labo CECM (Center for Experimental and Constructive Mathematics) à l'université Simon Fraser. C'était au sujet d'une trouvaille que j'avais faite à propos de $arctan(1/2)$. Comme certains peuvent le savoir.

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Qui a été trouvée par Euler en 1737. Moi ce qui me dérangeait un peu était la question : mais qu'est-ce que $arctan(1/2)$ au juste ? On connait depuis Newton que $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, ou à l'envers : $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. Ça coinçait pour moi avec le fait qu'on ne sait pas exactement ce que $arctan(1/2)$ ou $arctan(1/3)$ sont mais on sait que la somme donne bien $\frac{\pi}{4}$. Ce que je savais est le fait suivant. Si on évalue la fonction $\sin(2^n)$, alors le signe de cette fonction est très relié au développement binaire de π parce que ça revient à diviser 2^n par π. Bien oui, le sinus est périodique et la période est 2π donc si on prend un point éloigné il suffit de rapporter le point par rapport à l'origine.

Donc si on veut calculer le n'ième chiffre binaire de π il suffit d'évaluer la fonction sin pour 2^n. Mais voilà, c'est

trop simple ça, c'est effectivement vrai, le signe (si la valeur est négative ou positive) de la fonction est bel et bien liée de près à π. Là où ça coince est l'évaluation de sin(1) qui est la valeur de départ à une très grande précision. Ça revient à calculer π en fait. Le problème est circulaire comme on dit. Et à force de bidouiller avec ma HP-15c, je suis tombé sur la formule du doublement de l'angle pour l'arc tangente (inverse de la fonction tangente). Si x est un angle donné alors

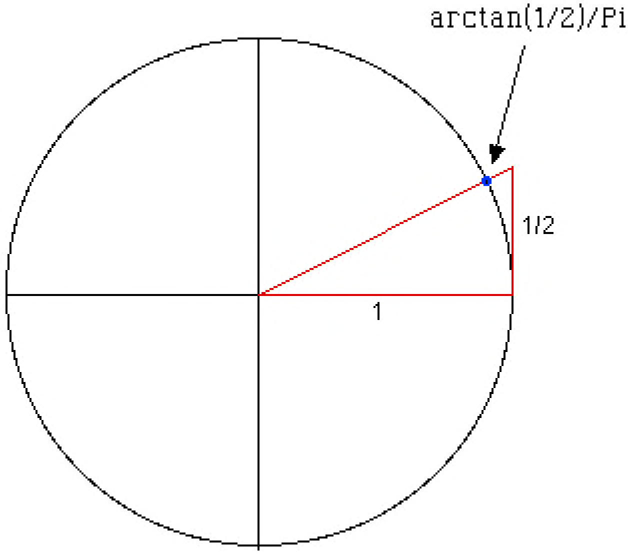
$$\frac{2x}{1-x^2}$$

Est le double de l'angle. Mais si on démarre avec $x = 1/2$ ça donne quoi ? C'est une série de fractions ordinaires qui grossissent en taille assez rapidement.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{-24}{7} \quad \frac{336}{527} \quad \frac{3541446}{164833} \ldots$$

Le signe de chaque fraction varie énormément en fait, si on pose que : +1 est quand c'est positif et 0 quand c'est négatif alors cette suite de 0 et de 1 est le nombre

$$\frac{arctan(1/2)}{\pi}$$



Le point arctan(1/2)/π sur le cercle de rayon 1

En binaire ! C'est là qu'arrive la question, mais comment ai-je pu trouver ça ? C'est un mélange d'intuition numérique et de raisonnement. J'avais l'intuition que la suite de 0 et de 1 voulait dire quelque chose. Mais je ne savais pas quoi, j'avais la réponse en binaire de cette constante mais je ne savais pas qu'est-ce que c'était. C'est là qu'arrive l'intuition numérique, j'ai trouvé en tâtonnant avec la calculatrice. En voyant le nombre, je l'ai simplement reconnu en le multipliant par π. C'était inédit comme trouvaille puisque c'était un procédé tout bête avec des fractions qui donnaient le développement binaire d'une constante dite naturelle, une vraie constante mathématique. À ce que je sache, c'est le seul exemple connu et je suis tombé dessus (et encore une fois de ma chaise). Fort de ce résultat et après avoir expliqué plusieurs fois à des mathématiciens autour de

moi qui ne voyaient pas où je voulais en venir. En fait, ça n'éveillait pas d'intérêt du tout. Je l'ai donc posté sur les newsgroups (groupes de discussions sur internet au début des années 90), j'ai eu une réponse assez rapide de l'un des directeurs du CECM à Vancouver qui en a profité pour écrire un article sur cette trouvaille, il citait mon nom et avait réussi à généraliser mon exemple. Mon exemple restait quand même le plus simple et surtout construit avec des nombres rationnels ordinaires, j'étais assez fier mais sans comprendre qu'en termes académiques je m'étais fait avoir. Ça fonctionne avec les citations et les références, j'ai compris ça bien plus tard. Bon, finalement, la constante porte mon nom, c'est la constante de Plouffe. Une mathématicienne a réussi à prouver que le nombre en question est transcendant comme π. Ma construction permettait en fait de calculer les chiffres binaires de la constante avec la règle et le compas. Je l'ai fait à la main avec un grand cercle une fois et j'ai réussi à trouver les 20 premiers bits de la constante $arctan(1/2)/\pi$.

Je me suis rendu compte d'une chose au moins, mon intuition pour les nombres est assez juste, je me pose une question simple et j'essaie d'y répondre. C'est un processus assez long, il faut vraiment aimer les chiffres pour ça j'imagine. La démarche est simple, je me concentre sur les faits numériques et quelques principes connus et ça mouline comme ça pendant des heures, je fais ça chaque nuit, chaque jour tout le temps. En fait, je ne pense qu'aux chiffres et j'essaie de les agencer à ma façon dans ma tête. Au lieu d'être des décimales de π, ce sont des tableaux de chiffres, des suites de nombres avec

lesquels je jongle. Le procédé peut marcher mais c'est extrêmement long et il faut être infiniment patient. J'attends que le clic se fasse tout seul en fait. Je me dis, s'il y a un motif, une combinaison simple, un principe simple, il apparaîtra de lui-même. Le reste du temps que j'ai je le consacre aux calculs avec mes ordinateurs. Ils roulent jour et nuit à calculer, j'ai réalisé à un moment donné qu'il devait y avoir des dizaines de millions de chiffres qui me passent devant les yeux chaque jour et même plus. Je regarde la machine calculer et le listing des tables défiler à longueur de journée. À force de voir les chiffres défiler, une idée me vient, j'essaie de trouver un filon numérique qui colle avec une formule et quand ça ne veut plus avancer je vais m'étendre pour mouliner en essayant d'avoir du recul. Une fois bien positionné, on arrive à voir le paysage. Quelques fois le pourquoi des choses apparait tout seul. J'ai déjà tenté d'expliquer cette démarche au cours de discussions avec des collègues de travail dans les boites où je bossais. Pour eux, j'étais un extraterrestre, je leur disais que le soir j'écoute du Telemann en jonglant avec des chiffres et quand je manque d'inspiration je pompe des données numériques sur internet. J'accumule les cahiers de notes depuis le début sur des Clairefontaine, ils en ont des gros de 384 pages quadrillés. La pile fait plus d'un mètre d'épaisseur. Quand je manque d'inspiration, je potasse ces cahiers. Je note tout ce qui peut être remarquable. La plupart du temps ce sont les avenues explorées qui souvent rencontrent un mur. Il y a des énoncés dans ces cahiers qui remontent à 40 ans en arrière, je garde tout. Les bonnes idées c'est précieux comme de l'or. Il n'y a

pas de miracle en fait. À un moment donné on en a une très bonne mais ça ne dit pas toutes les avenues qui ont été explorées, les fausses pistes. On voit souvent ça quelqu'un qui a une passion qui s'est soudainement révélée à cause d'un événement dans l'enfance ou un peu plus tard. Ce qui se passe à mon avis c'est que l'esprit est déjà préparé à cette situation. C'est un filtre qui a capté quelque chose et si la personne est du genre à persister, chemin faisant ça finit par donner quelque chose qui peut être intéressant. Ce n'est pas forcément une question d'intelligence pure, c'est plutôt beaucoup de travail. Ces personnes ont souvent les idées qui collent bien, ils en ont une tenace et ils y tiennent beaucoup. C'est mon cas.

J'ai tendance à accumuler des données numériques de façon massive. Une fois en fouillant les archives de la BANQ (Bibliothèque des Archives Nationale du Québec), je suis tombé sur la racine des disques pour toute l'archive numérique. En français j'avais devant moi les répertoires où se trouvent toutes les données, j'ai donc mis un programme robot en marche et pompé toute la bibliothèque. Ça a rempli 2-3 disques sur mes ordinateurs et là j'ai pu utiliser un programme qui indexe tout le contenu au complet. Incroyable, j'ai réussi à trouver des photos de la maison à St-Jovite, des traces de la vie de mon grand-père, de mon oncle pianiste qui faisait des tournées au Québec, toutes sortes d'informations très pointues. Ça aurait été assez difficile de trouver ça avec leur site internet. Ce problème des informations précises à trouver pour un sujet donné est le même avec la BNF en France, il y a

plein d'informations mais si on cherche à fouiller toutes les archives pour des traces de quelqu'un qui a existé, c'est tellement mal alambiqué que même les plus braves se découragent bien avant. J'ai essayé de fouiller sur le site de la BNF pour des informations précises, ça ne fonctionne pas, ils n'ont pas compris que pour chercher correctement il faut tout indexer. Google a compris ça depuis longtemps d'ailleurs.

Une fois à l'Université du Québec, j'avais un compte sur les ordinateurs du département et j'ai eu l'idée de construire un gros dictionnaire encyclopédique en me servant d'une table de définitions. J'ai donc fait un programme robot qui prenait une définition et allait chercher sur Google la définition. Une fois trouvée, je remettais ça dans la table de départ et ça marchait en boucle comme ça. Ça a fonctionné pendant quelques heures et finalement j'ai reçu un appel du directeur du labo (LACIM), Pierre Leroux qui me demandait qu'est-ce que j'avais encore fait puisque l'Université du Québec au complet était bloquée pour Google. Google n'avait pas aimé du tout qu'on se serve de leurs données pour faire exactement ce qu'ils font. Bon finalement, ils ont envoyé une lettre d'excuses à Google et l'UQAM a pu retrouver la connexion avec Google. J'ai dit que je ne recommencerais plus mais dans mon fort intérieur j'étais fier d'avoir trouvé une façon de craquer Google et d'avoir eu leur attention pendant 1 journée. En fait, ce que fait Google est d'inverser tout ce qui existe en les classant par ordre alphabétique. Inverser c'est important. C'est pour ça que j'ai appelé le premier engin

sur internet ‘Inverse Symbolic Calculator’ et plus tard en 1998 : L’inverseur de Plouffe.

Le ISC a ouvert le 18 juillet 1995, succès immédiat, le site était dans le top 5 %. Beaucoup de requêtes, moi je continuais à l’alimenter jour et nuit, je calculais avec Maple des expressions mathématiques. Le critère était que : tant que ça tenait dans 1 ligne de texte et que c’était compréhensible pour la plupart, alors c’était inclus dans la table. Peu de temps après, j’ai un flash pas possible en août 1995, Je me suis rendu compte qu’il était possible de calculer le n’ième bit du nombre $ln(2)$ en binaire. Ça été un choc, ça faisait des années que je savais le faire pour les rationnels. Voici la formule pour $ln(2)$.

$$ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{160} + \cdots$$

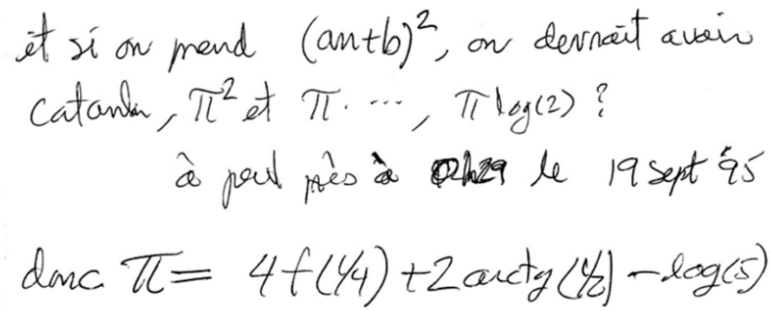
Chaque terme est une puissance de 2 divisée par un entier pas très gros : donc on peut le calculer en base 2 facilement ! L’astuce est que pour par exemple le 19ème terme on a à évaluer $\frac{1}{19\cdot 2^{19}}$ et que ce calcul est simplement le calcul de $\frac{1}{19}$ mais décalé de 19 positions en base 2. Mais justement, on peut calculer à l’avance $\frac{1}{19}$ à une position arbitraire en utilisant une autre astuce très simple. Si on veut calculer par exemple 2^{160}, il suffit de calculer jusqu’à 2^5 et de mettre au carré parce que de mettre au carré fait doubler l’exposant. On se rend à 2^{10}, 2^{20}, 2^{40}, 2^{80} et finalement 2^{160} assez rapidement. Même si l’exposant est de l’ordre du milliard on a en fait que 30 opérations élémentaires à faire, ce truc est connu depuis

des lustres, 2200 ans selon D.E. Knuth, un grand spécialiste de l'informatique et du calcul. Donc ce n'est pas nouveau du tout, ce qui l'est est le fait d'appliquer ça à une série (somme infinie) simple, personne en 2200 ans n'avait jamais pensé à l'appliquer. Du coup, j'ai réalisé que la constante $ln(2)$ pouvait être évaluée en binaire très facilement sans avoir à calculer les chiffres avant. Mais de $ln(2)$ à π quel est le chemin? En fait, il faut reculer un peu et réaliser que le nombre π tout comme $ln(2)$ est un logarithme. Au lycée on apprend qu'il y a en mathématiques dans ce domaine 2 grandes familles de fonctions. L'exponentielle et le logarithme. La fonction sinus ou $sin(x)$ est une exponentielle, ça ne saute pas aux yeux mais c'est assez connu en mathématiques. Si le nombre π est un logarithme au même titre que $ln(2)$ alors il faut trouver la bonne combinaison de séries (somme infinies) qui donneront π. J'ai mis 20 ans à réaliser que π pouvait être facile à calculer en binaire, un bon mois pour trouver une façon de programmer un ordinateur pour qu'il trouve la bonne combinaison. Une fois programmé, l'ordinateur a pris 1 seconde pour trouver la formule qui est maintenant bien connue.

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

Mon cahier de notes, le 19 sept. 1995 à 0h29 (heure du pacifique).

L'année suivante, j'ai trouvé une façon de le faire dans la


et si on prend $(an+b)^2$, on devrait avoir catalan, π^2 et $\pi \cdot \cdots$, $\pi \log(2)$?
à peu près à 0h29 le 19 sept 95

donc $\pi = 4f(1/4) + 2\,\mathrm{arctg}(1/2) - \log(5)$

base 10. Ça fonctionne oui mais c'est bien plus lent. Tout de même, j'ai écrit un article décrivant la méthode. Je tenais à le faire pour une bonne raison, prouver qu'on peut y arriver avec une calculette, qu'on peut calculer à la main (ou presque) la 1000ème décimale du nombre π sans avoir à calculer les décimales avant. En 1853, un certain William Shanks a calculé avec les moyens de l'époque 707 décimales de π, il a mis 20 ans pour y arriver mais une erreur de calcul a faussé son résultat à partir du rang 528. On s'aperçut de l'erreur en 1946 quand un certain Ferguson a repris le calcul avec une calculatrice de bureau. S'il avait réfléchi un peu il aurait pu vérifier son erreur, c'était certainement possible, même en 1853.

La découverte de la formule de π et l'algorithme a fait le tour du monde. Quelques mois après, Bellard en France a trouvé une version plus efficace de la même formule et d'autres mathématiciens ont trouvé plein d'exemples. En 2022 passé Google a mis

une série de machines pour calculer en décimal 100 000 milliards de décimales de π et pour vérifier que le développement binaire est le bon, ils ont utilisé ma formule. Le calcul en décimal est d'abord fait en binaire et converti ensuite en base 10, lorsque le résultat est en binaire ils en profitent pour vérifier. D'ailleurs le calcul de π est souvent utilisé pour cette raison. Le calcul de Google par exemple a pris des mois et est considéré comme le test ultime pour un gros système. Ça demande toutes les ressources, mémoire, disque et l'unité centrale de façon intensive pendant des mois. On conclut que tout s'est bien passé si les 2 calculs concordent. Si les 2 calculs concordent on en conclut que le système est assez fiable.

À ce moment de l'histoire de cette formule et de l'algorithme, les avis sont partagés. De mon côté j'ai eu cette illumination et je me disais que d'associer le nom de mon directeur de thèse et voulant jouer *fair play* j'ai accepté de faire un article avec lui et lui en a profité pour rajouter un auteur qui n'a rien à voir avec tout ça mais étant donné que cette personne était de la NASA, je me disais que si les ordinateurs de la NASA s'y mettent ce serait bien. En réalité, ce collaborateur était loin d'avoir accès aux ressources informatiques de la NASA, tout au plus il avait accès à une machine similaire à celle qu'il y avait au CECM. Au début l'article devait porter sur le calcul du logarithme de 2 et c'est au cours du mois qui a suivi que j'ai découvert la formule pour π. La nouvelle s'est très rapidement répandue dans les médias, tellement qu'un journal national (le Globe and Mail) en a fait un article, ça n'a pas du tout été comme je pensais.

Ils ont mis la photo des deux directeurs avec l'article et je leur ai dit : Mais que vient faire sa photo dans cet article ? Je reçois alors comme réponse que le service des communications de l'université s'est trompé avec la photo. Plus tard, en décembre, une chaine de télé est venue nous filmer. Ils (les 2 directeurs) me disent, tu sais Simon, si c'est pour la télévision, il est important de ne pas porter de vêtements blancs. Ah oui, mais pourquoi ? Parce qu'à la télévision le blanc ça passe mal. Je me suis habillé en jeans et en foncé pour me rendre compte qu'ils étaient habillés tous les deux en blanc. Ça commençait à m'agacer sérieusement. Plus tard dans l'année, ces mêmes deux directeurs reçoivent un prix académique pour la découverte et moi : rien. Ils ont fêté ça et même porté un toast à la reine d'Angleterre. Je suis resté assis sans rien dire. Moi qui suis originaire du Québec, la reine d'Angleterre est la dernière personne pour laquelle je lèverais mon verre, surtout dans une occasion pareille. Quand l'article du journal a paru, ça a fait le tour du monde mathématique. Il est assez rare dans la presse en général qu'une découverte mathématique spectaculaire soit mentionnée, c'était le cas. Un soir je suis invité à diner chez l'un des deux directeurs qui justement avaient une audition pour les subventions de recherche du Canada dans la journée, le comité avait bien sûr une copie du journal Globe & Mail. Disons que si vous découvrez quelque chose d'important dans un labo de recherche et que cette découverte fasse la une des journaux nationaux on peut dire que c'est important. Ce 10 octobre 1995 était l'une de ces journées mémorables. Ce soir-là, j'arrive à cette soirée et

je me dis, si je dois demander quelque chose c'est le moment ou jamais. Je leur demande alors, bon maintenant que la découverte a fait le tour de la planète, je voudrais bien être professeur ici à Simon Fraser University, il a ri, et a répondu : *don't even think about it*. J'ai compris alors qu'il valait mieux que je m'éloigne de ces tristes individus. Bien plus tard, par l'entremise d'autres chercheurs on m'a raconté le même genre d'histoire, ce n'était pas moi en particulier, ils faisaient ça avec tout le monde. Quelques mois après, il m'arrivait de me lever la nuit pour me mettre à détester mes patrons, j'ai compris alors qu'il était temps que je déménage. J'ai trouvé un job à Wolfram aux USA pour le programme Mathematica, ça n'a pas été difficile en fait. Pour me rendre compte que le patron de la boite était tout aussi rapace que les deux autres et légèrement mégalomane en plus. J'ai pris mes billes et suis rentré à Montréal au plus vite.

Une fois revenu à Montréal, ça n'a pas été du tout comme je pensais. Je me mets à contacter tous ces matheux que je connaissais pour obtenir un poste dans un CÉGEP, je ne voulais pas exactement être un professeur à l'université. Le CEGEP (équivalent des classes terminales au lycée) m'aurait suffi largement, je n'en demandais pas plus. Ça a fait chou blanc partout, pas une seule fois mon cv n'a pu se rendre ne serait-ce qu'au bureau des ressources humaines. Je les ai à peu près tous contactés. Une fois, j'ai même eu un professeur qui m'a demandé mon autographe dans le couloir ou je tentais de trouver un job. Résigné et très déçu je suis

revenu dans le monde commercial des ordinateurs centraux (Mainframe), là au moins je pouvais bosser et me consacrer à mes recherches. Ce qui n'était pas plus mal. Au moins je n'avais pas à supporter les profs des universités, je préfère de loin mener mes recherches numériques tout seul dans mon coin. D'autant plus qu'au début des années 2000, il était maintenant possible d'avoir un pc ordinaire qui puisse faire des calculs assez rapides. De plus, le monde de l'édition avec internet permettait de publier assez rapidement sans passer par la case académique. Ce que j'ai fait et je n'étais pas malheureux de cette tournure. J'ai fait ça jusqu'en 2004. Début janvier 2004, à la société ou je bossais, j'étais ce qu'on appelle mis sur la tablette, mis au rancart. Le projet où je bossais avait été mis à l'arrêt puisque la société s'est mise à embaucher des Indiens (de l'Inde) qui coutaient bien moins cher. Résultat, j'ai été viré. Viré au Canada est assez expéditif. Tu arrives le matin au bureau et tout d'un coup on t'amène une boite en carton pour tes effets personnels et tu as 10 minutes pour dégager. On te fait signer une décharge, tu la signes si tu veux mais ça ne donne rien de toute façon et tu te retrouves à la rue dans l'heure courante.

Cette même semaine, quelqu'un de l'UQAM (Université du Québec à Montréal) m'appelle pour me dire que j'avais été choisi pour recevoir le prix Reconnaissance UQAM en recherche. Ce prix est essentiellement un machin en plexiglas qui peut servir à effrayer les oiseaux dans le jardin mais c'est sa seule utilité. Je l'ai pris en photo et je l'ai mis à la poubelle.

Dans le mois qui a suivi, une amie a parlé de ce prix au journal La Presse et je me suis retrouvé 'Personnalité de la Semaine' en sciences. J'ai eu droit à une interview à la radio et à la télévision nationale et une page complète dans le journal. C'était une bonne semaine. Je me dis alors, (merde), j'ai peut-être une chance d'avoir un job comme prof quelques part ? Bien non, ça n'a pas marché, pas du tout. Plus j'étais connu, moins ça marchait. Je suis donc retourné encore une fois sur le marché du travail informatique pour faire des payes en COBOL, passionnant. Je me rappelle dans l'une de ces jobs une fois, quelqu'un a découvert le pot-aux-roses sur mon cv. J'ai 2 cv, l'un est le cv ordinaire pour le travail en entreprise et l'autre concerne les conférences, articles et découvertes. En 2005, ça a abouti à une page sur Wikipedia. L'un des employés découvre que j'étais dans le livre des records, que j'ai publié un livre de maths et qu'en plus j'ai découvert la formule de π et tout le tralala. Il me dit alors, mais Simon, tu es une *rock-star* ? C'est trop tard, je suis dans la boite maintenant. Mais alors pourquoi viens-tu ici ? Mais c'est parce qu'on me paye, qu'est-ce que tu crois… En 2007, j'étais employé pour une boite qui faisait les payes d'à peu près tous les employés des hôpitaux au Québec. Et rebelote, un bon matin, on m'amène la boite en carton et retour à la case départ sur la rue une heure après. J'en ai eu marre du Québec, je suis parti, j'ai déménagé en France. Curieusement, dès mon arrivée, c'était le contraire du Québec. J'ai eu un job deux semaines après avoir obtenu un visa temporaire. J'y suis resté, me suis marié et divorcé dans l'année qui a suivie et devenu citoyen

français par contumace en 2017. Je dis ça avec humour puisque si on est canadien, la citoyenneté française n'est pas exactement difficile à obtenir. Si on parle le français correctement, et l'anglais, qu'on est diplômé, ça passe assez vite à la préfecture. On me l'a dit en plus, si vous faites votre demande, votre dossier sera sur le dessus de la pile. Donc j'ai fait ma demande et peu de temps après, j'avais ma baguette de pain sous le bras et un béret.

En 2015, on me contacte pour donner une conférence à Marseille au fameux MUCEM, ils avaient organisé La Journée De Pi, ça tombait bien c'était pour le 3/14/15, le 3 mars 2015. À chaque 14 mars (3/14) sont organisées des conférences, réunions et happenings en tout genre pour ce jour de Pi qui aussi est la date de naissance d'Einstein. Je dis oui évidemment. Je donne donc, la conférence à exactement 9h26 et 53 secondes (la suite des décimales) et tout se passe assez bien. Sur place, un professeur du Lycée Clémenceau me demande de donner la même conférence à Nantes. En plus ce Lycée est à 300 mètres de mon domicile. Je ne pouvais pas refuser ça. 2 mois après je redonne à peu près la même conférence à ce Lycée, la salle était pleine, environ 300 personnes. Suite à la conférence avec quelques autres profs de l'IUT (Université de Nantes) et ce professeur du Lycée on dine. J'en profite pour leur demander, si jamais vous avez des vacations, ou des trous à boucher dans vos cours de maths, je suis preneur. Il ne s'est rien passé ensuite. Plusieurs mois après, par un hasard fou, l'un des profs de l'IUT en avait marre de son enseignement et a décidé comme ça, sur

un coup de tête de s'expatrier en Angleterre. Il me contacte et me dit 'Toi, tu vas me remplacer à l'IUT'. C'était la première fois qu'on m'offrait un poste de professeur, tout juste à 60 ans. Ça a duré 2 ans, j'étais aux oiseaux. Au bout de 2 ans, le poste que j'occupe est annoncé au niveau national. Évidemment, je ne sais plus combien de candidats ont postulé et forcément, ils en retiennent un, je me retrouve à sec. Coup de bol, un autre professeur de l'autre campus décide tout d'un coup pour d'autres raisons de quitter l'enseignement et aller dans le privé. Il me contacte et me dit exactement la même phrase. Je me retrouve donc à l'autre campus pour à peu près les mêmes cours de mathématiques mais version circuits électriques et séries de Fourier. Les séries de Fourier sont des outils pour analyser des signaux en tout genre, essentiel pour quelqu'un qui fait des études en génie électrique évidemment. J'avais été professeur à temps partiel au Québec en 2005 car deux amis (Paul et Hélène) tous deux professeurs à Longueuil m'obtiennent un poste pour des cours aux adultes en sciences et mathématiques dans une école Secondaire à Longueuil. Mais ça c'était de loin le mieux que j'ai pu avoir grâce à eux. C'était à temps partiel bien sûr et encore une fois, j'étais SABT, sous-adjoint bouche-trou mais très content de ce coup de pouce et d'avoir au moins la moitié d'un job.

Un beau matin mon frère Louis m'envoie un courriel pour me dire que mon nom apparaissait dans une liste sur Wikipedia à propos de la Loi de Stigler :

Une découverte scientifique ne porte jamais le nom de son auteur.

Ça été énoncé en 1980 par Stephen Stigler sous le nom : loi d'éponymie de Stigler

J'étais surpris d'apprendre combien de théorèmes et/ou de formules connues ne portent pas le nom de la personne qui a fait la découverte et désolé de constater que mon nom y figure pour la postérité. Ça me fait une belle jambe me disais-je. L'histoire qui est maintenant connue est que j'ai bel et bien fait la découverte de la formule le 19 septembre 1995 et aussi l'algorithme qui permet d'y arriver. En 2003, une amie me demandait c'est quoi cette histoire avec le nom de la formule, on dit que c'est toi qui l'a découverte mais il y a 2 autres noms ? Je préférais garder ça pour moi mais elle me disait tu devrais mettre ça sur internet, tout d'abord c'est la vérité et qu'est-ce que tu as à perdre ? J'ai donc écrit un long courriel que j'ai posté sur les newsgroups (sci-math). J'ai eu beaucoup de réactions de gens qui connaissaient mes 2 collègues patrons à qui il était arrivé la même chose. Ça ne surprenait pas beaucoup de gens en fait. Quelques années plus tard, j'apprends qu'un programme appelé Inverse Symbolic Calculator apparait sur un site en Australie. Je constate assez vite que c'était une copie de mon inverseur de 1997 qu'on avait habillé différemment mais avec les mêmes tables exactement et le même programme. Pour constater que les auteurs du site s'appropriaient la mise au point du programme et des tables évidemment sans citer mon nom nulle part.

Là j'étais fâché. J'ai contacté le recteur de l'université pour lui faire part du vol de propriété intellectuelle que ça représentait. J'ai exigé que mon nom apparaisse au moins sur la première page d'accueil du site. Ils n'ont pas eu le choix, ils l'ont fait. Celui qui était derrière tout ça était encore l'un de ces 2 patrons qui avait déménagé là-bas. Quelques années plus tard, il est décédé et le site a été fermé. Celui qui existait en 1995 est encore en fonction à Vancouver aujourd'hui, le même que l'original avec 54 millions d'entrées. Mais comparé à ce que j'ai comme engin sur les gros ordinateurs à la maison c'est plutôt un jouet qu'un engin de recherche, c'est Mickey Mouse. La table actuelle occupe 9.1 téraoctets et contient 114.3 milliards d'entrée et de plus ça fonctionne avec un disque électronique ultra-rapide (SSD M.2).

Chapitre 8

Les nombres premiers

Dans les années 80, on avait une habitude moi et quelques amis (mon frère Louis, Paul Simon et Sylvain Lambert) de faire des séminaires. Chacun préparait un sujet de son choix et le présentait aux autres. La seule exigence est qu'il fallait que ce soit scientifique. Sylvain qui était graphiste avait créé le logo avec la photo d'Henri Poincaré. On avait choisi Poincaré car on avait une admiration pour ce mathématicien.

Le logo du Séminaire Poincaré (Sylvain Lambert, 1986)

L'un des sujets, présenté par moi en 1989 était les nombres premiers. C'était une recherche sur les formules qui donnent des nombres premiers parmi les polynômes et autres formules. La formule bien connue est celle d'Euler, le polynôme $n^2 + n + 41$ donne un

nombre premier pour toutes les valeurs de n entre 0 et 39. La question était : Existe-t-il d'autres polynômes qui en donnent plus ? Peut-on trouver une autre formule qui en donne quelques-uns ? En fait je n'ai pas trouvé de réponse à cette question, même en utilisant un programme à cet effet, ça n'a rien donné de bon. C'est bien plus tard que j'ai compris qu'en fait, on peut en trouver qui en donne une infinité, il faut juste avoir la bonne méthode de calcul.

Les nombres premiers est un vaste sujet et les réponses sont difficiles. Depuis une centaine d'années quelques-unes ont été trouvées. J'avais tenté (en 1989) de générer des polynômes et de voir si c'était premier souvent. Ça ne fonctionnait que très peu. Bien plus tard j'ai vu qu'en fait on a trouvé mieux que le polynôme d'Euler en 2010.

Le voici : si n est compris entre -42 à 15 alors

$$\frac{n^6}{72} - \frac{5n^5}{24} - \frac{1493n^4}{72} + \frac{1027n^3}{8} + \frac{100471n^2}{18} - \frac{11971n}{6} - 57347$$

est premier.

Il y a une chose curieuse à propos de ce polynôme : ils ont pris un temps fou pour le trouver, plus de 6 mois de calculs intensifs. En fait, il y a bien mieux (et bien pire), c'est la formule trouvée par Jones, Sato, Wada et Wiens en 1976 (attention la prochaine formule est pour les cœurs solides).

Si on a

$$(k+2)(1-\alpha_0^2-\alpha_1^2-\cdots-\alpha_{13}^2)$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= wz+h+j-q\\
\alpha_1 &= (gk+2g+k+1)(h+j)+h-z\\
\alpha_2 &= 16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\\
\alpha_3 &= 2n+p+q+z-e\\
\alpha_4 &= e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2\\
\alpha_5 &= (a^2-1)y^2+1-x^2\\
\alpha_6 &= 16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2\\
\alpha_7 &= n+l+v-y\\
\alpha_8 &= (a^2-1)l^2+1-m^2\\
\alpha_9 &= ai+k+1-l-i\\
\alpha_{10} &= [(a+u^2(u^2-a))^2-1](n+4dy)^2+1-(x+cu)^2\\
\alpha_{11} &= p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m\\
\alpha_{12} &= q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x\\
\alpha_{13} &= z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm
\end{aligned}$$

C’est une formule à 26 variables et de degré 25. Si toutes les variables de a à z parcourent les entiers naturels (1,2,3, …) alors quand c’est positif : c’est un nombre premier. Mais il y a un hic, pour trouver les valeurs qui donnent des nombres premiers fonctionne assez mal, même très mal. Si on met cette formule dans un ordinateur très rapide, ça ne fonctionne à peu près jamais. En d’autres mots, théoriquement, le problème est résolu mais en pratique, c’est assez décevant. En termes d’efficacité c’est assez mauvais. C’est une

prouesse théorique sans précédent oui mais il y a un prix très élevé pour y arriver.

Mais n'existe-t-il pas des moyens plus efficaces pour générer les nombres premiers ? La réponse est oui c'est le crible d'Ératosthène et ça va très vite. Il y a près de 2300 ans, le mathématicien grec Érathosthène a inventé un procédé tout simple pour y arriver. On met les entiers de 1 à n dans une grille carrée ou rectangulaire et on raye les multiples de 2, les multiples de 3, etc. (sauf le 2 et le 3 bien entendu). À partir de 1, en procédant de la sorte, ce qui reste sont les nombres premiers de 1 à n. Il est d'usage de ne pas compter 1 comme nombre premier. Les programmes actuels qui génèrent une liste des nombres premiers le font de la même façon. Ici 'même façon' veut dire qu'essentiellement c'est un crible, ou filtre qu'on applique à la suite des entiers. Depuis 2300 ans, le procédé a été passablement optimisé oui mais la technique de base du savant grec reste d'actualité. À l'heure actuelle, on a compté tous les nombres premiers jusqu'à 10^{29} (100 milliards de milliard de milliards).

Il y a plusieurs points de vue sur les nombres premiers. Tout d'abord il y a la factorisation. Les programmes actuels permettent assez facilement de factoriser un nombre qui peut avoir jusqu'à 40 chiffres en moins de 1 seconde. Les programmes spécialisés comme Maple, Mathematica arrivent à trouver les facteurs de nombres jusqu'à 80 chiffres de largeur (une ligne complète de chiffres). Le record actuel de factorisation d'un nombre quelconque est d'environ 250 chiffres, mais ici ce calcul est très spécialisé. Ça veut dire

en français que ça demande des moyens importants. Plusieurs mois de calcul avec des programmes sophistiqués. Par contre, pour savoir si un nombre est premier ou non, sans avoir explicitement les facteurs est bien plus facile. Étrangement, on arrive à savoir qu'un nombre de 5000 chiffres est premier ou composé en moins de 1 seconde. Ça ne dit pas quels sont les facteurs, ça indique seulement s'il est premier ou non. Ces tests sont appelés probabilistes. La limite supérieure en taille avec un ordinateur de bureau moyen est de l'ordre de 1 million de chiffres. On arrive à produire la phrase suivante : Ce nombre est fort probablement premier.

Auteur(s)	Année	Commentaire	Efficacité	Nombres calculés
Ératosthène	−276 à −194	Crible d'exclusion	Pratique	Infini calculable
Mersenne	1536	Nombres premiers de la forme 2^p-1.	Pratique, exact	51
Fermat	1640	Petit théorème de Fermat	Produit des premiers probables faibles	Infini calculable
Euler	1772	Polynôme du second degré	Pratique	40
Mills	1947	Double exponentielle	Pratique	Moins de 10
Wright	1951	Super exponentielle	Pratique	Moins de 5
Wilson	vers 1780	Formule qui utilise *p* !	Théorique	Très peu
Jones, Sato, Wada et Wiens	1976	Polynôme de degré 25 à 26	Théorique	Très peu
John H. Conway	1987	Fractran	Théorique	Très peu
Rowland	2008	Récurrence	Théorique	Très peu
F. Dress et B. Landreau	2010	Polynôme de degré 6	Pratique	58
Benoît Perichon *et al.*	2010	26 premiers en progression arithmétique	Pratique	26
Tomás Oliveira e Silva *et al.*	2019	Programme Primesieve : crible d'Ératosthène optimisé	Le plus rapide connu	Infini calculable sur un ordinateur actuel

Petit tableau des différents procédés ou formules permettant de calculer des nombres premiers. On entend par infini calculable que : en autant qu'on ait la patience et les ressources c'est infini mais on est forcément arrêté à un moment donné par la taille des calculs. Érathosthène devait calculer sur des tablettes ou parchemins, Archimède lui utilisait le sable par terre. Le programme primesieve peut aller jusqu'à 2^{64} = 1.8

$\times$ 10^{18}, si on a la capacité de les enregistrer puisqu'il faut un entrepôt de disques durs. J'ai fait le calcul et ça donne plus de 403374 disques durs de 10 téraoctets, difficilement réalisable. Pour le test de Fermat, il est assez avantageux pour les grands nombres mais pas si n est plus petit que 10^{18} ,c'est bien plus rapide avec le programme Primesieve et si n est plus grand que ce nombre alors le test est considéré comme probable faible.

En 1930, le mathématicien Émile Borel a énoncé ce que pouvait être une probabilité négligeable en termes humains dans son livre *: Sur les probabilités universellement négligeables.* Si un événement malheureux a une chance sur 1 million de se produire, alors à l'échelle humaine c'est impossible, on peut dormir tranquille. Si un événement malheureux à une chance sur 1000 milliards (10^{-12}) de se produire alors c'est impossible à l'échelle terrestre et plus loin de dire qu'à l'échelle cosmique c'est $\frac{1}{10^{50}}$ ou 10^{-50}. En mathématiques avec les nombres premiers c'est bien plus petit encore, on parle ici de probabilités plus faibles que 10^{-100}. Cette probabilité de 10^{-100} équivaut à trouver 1 molécule d'eau dans tous les océans de la terre et qu'en termes pratiques les tests pour décider si un nombre de 1000 chiffres est probablement premier sont astronomiquement bons. Ici arrive un schisme parmi les mathématiciens dits puristes qui argumenteront que : oui mais ce n'est pas certain et d'autres de dire : Oui mais à toute fin pratique ça revient au même : Si le test est passé pour un nombre de 1000 chiffres : alors il est

premier. Cette probabilité on peut l'évaluer, il y a une estimation qui existe et qui dit : Le nombre de nombres pseudo-premiers (nombres qui passent le test de Fermat mais qui ne sont pas premiers) est de l'ordre de n $\approx\ n^{0,285}$

Cette estimation est basée sur la quantité de pseudo-premiers connus. Ça veut dire que si n = 10^{100} il y aura de l'ordre de 10^{29} faux-positifs. Mais attention ici, ça signifie que la probabilité qu'un nombre de 100 chiffres ou moins pris au hasard ne soit par premier est de l'ordre de 10^{-71}, si n est de l'ordre de 1000 chiffres ou moins la probabilité tombe à 10^{-714}. Pour donner une idée de cette quantité, imaginez que c'est plus faible que de tomber sur une molécule d'eau prise au hasard dans la mer, sur toute la surface des mers sur terre. Les quantités astronomiques de nombres sont trompeuses pour le commun des mortels si on compare à l'infini. En fait, l'infini pour monsieur et madame tout le monde est largement plus petit que 10^{100}. C'est assez semblable à la phrase (qui est vraie) : il y a autant de planètes dans la galaxie qu'il y a de grains de sables sur une plage et même sur toutes les plages de la terre. Il y a une autre analogie amusante. Dans le livre/film : *The Hitchhiker Guide to the galaxy*, en français le Guide du Routard de la Galaxie il y a le personnage de Zaphod Beeblebrox qui a un vaisseau équipé d'un moteur *Infinite Improbability Drive* qui permet de se déplacer n'importe où dans l'univers et partout à la fois mais qui a un effet assez ennuyeux de faire se produire des événements hautement improbables. Tout événement même

improbable peut se produire. Avec les nombres premiers c'est la même chose en fait. Si un nombre est de l'ordre de 1000 chiffres et que le petit test de Fermat détecte que c'est un premier on fait face au même genre de raisonnement. Le mathématicien Carl Pomerance est de cet avis aussi, à toute fin pratique le test est valable. Les avis divergent sur ce point. Il disait que ces tests produisent des nombres premiers de qualité industrielle.

Les nombres premiers aujourd'hui sont utilisés pour les transactions bancaires et la sécurité. Il y a un principe simple à propos des nombres premiers et les facteurs, c'est le principe de la trappe numérique. Si on prend un nombre disons de 200 chiffres qui est probablement premier et un 2ème qui l'est aussi, alors si on fait le produit des 2 nombres on aura un nombre d'environ 400 chiffres. Alors ce nombre est pratiquement impossible à factoriser. Étant donné que le record du monde actuel pour la factorisation d'un nombre quelconque est de seulement 250 chiffres, alors on peut être certain à 99.999 % (je vous fais grâce des 2 lignes complètes de 9) que les facteurs resteront secrets. C'est à ce moment que 3 mathématiciens ingénieux ont trouvé une façon de coder les transactions bancaires en utilisant justement cette propriété. Ici je simplifie le procédé. On s'en sert pour faire les dépôts bancaires par exemple. Le procédé est assez rapide et simple. On veut sécuriser l'envoi d'une transaction de monsieur A vers B, on code alors en chiffres, le nom, l'adresse, le montant du dépôt, la banque émettrice et celle qui reçoit le dépôt.

À partir de ces informations on fabrique en une fraction de seconde un nombre premier d'une taille d'environ 175 chiffres, on choisit ensuite un autre nombre premier de la même taille à peu près et bien sûr différent. On multiplie les 2 nombres ensemble ce qui nous donne un nombre de 350 chiffres et c'est ce nombre qui est envoyé par internet sur une ligne sécurisée. Si un individu C capte cette transaction, il aura devant lui le nombre de 350 chiffres à décoder (trouver les facteurs), il aura bien du mal même s'il y met le paquet. On parle ici de plusieurs milliers d'années de calcul. Les banques et les organismes concernés sont tellement certains de ces faits qu'il n'y a pas si longtemps on offrait un prix de 250 000 dollars à quiconque pouvait trouver les facteurs de quelques nombres tests. Le concours a été lancé sur internet pendant quelques années et personne n'a jamais réussi à craquer ces nombres. Des années ont passé et certains chercheurs ont réussi à factoriser les plus simples jusqu'à 250 chiffres. Le concours a été annulé en 2007 finalement. Ces nombres tests sont restés et servent de barème pour la factorisation.

Un dernier exemple, j'ai dit que les banques utilisent des nombres premiers probables de l'ordre de 175 chiffres. Si on fait le calcul pour un nombre de 175 chiffres, la probabilité qu'il soit composé (qu'il soit un pseudo-premier) est de l'ordre de 10^{-101}.

Bien des années après 1989, j'ai recommencé à m'intéresser aux nombres premiers. Ma question naïve était mais pourquoi ne peut-on pas trouver une formule qui donne des nombres premiers aussi grands que l'on veut ? Pourquoi est-ce si difficile de trouver une formule

qui en donne disons 100. Il y a plusieurs approches à ce problème. La première approche est pratique, si on veut des nombres premiers, il suffit de prendre un programme spécialisé. L'un d'entre eux, appelé PrimeSieve est le plus rapide au monde. On lui demande de donner tous les nombres premiers jusqu'à disons 1000 milliards et il démarre au quart de tour et réussit à remplir de chiffres la plupart des disques durs en 2-3 heures. Mais après 10^{18}, il s'arrête. L'algorithme est bloqué par la taille des premiers. La 2ème approche est de trouver une formule ou procédé qui les donne tous. Ça été fait déjà, le blocage se situe au niveau de l'efficacité. Une bonne dizaine de procédés (voir le tableau) ont été inventés pour cette approche. Certains procédés sont très ingénieux, mais si on les programme dans un ordinateur la performance est très décevante. Comparé au procédé précédent c'est vraiment mauvais. La 3ème approche consiste à produire une formule explicite. Précédemment je donnais l'exemple de ce polynôme du 6ème degré qui a pris un temps déraisonnable à être trouvé.

La 4ème approche consiste à trouver un nombre réel qui une fois utilisé dans une formule simple, génère un tas de nombres premiers rapidement. La première trouvée a été celle de Mills en 1947. Si A est la constante 1.306377… alors

$$\lfloor A^{3^n} \rfloor$$

Donnera une suite de premiers infinie. La suite commence comme suit : 2, 11, 1361, 2521008887, 16022236204009818131831320183, … le prochain

terme est 3 fois plus long. Ici les crochets veulent dire que c'est la fonction plancher (floor en anglais), on tronque la partie décimale et on ne garde que la partie entière. La largeur (nombre de chiffres) triple à chaque terme. En d'autres mots : la constante A est suffisamment précise et il y a suffisamment de premiers quand n est très grand, qu'il y a toujours de la place pour un nombre premier supplémentaire même si A est une constante bien définie. C'est une bonne trouvaille, le seul problème est que les nombres premiers trouvés grossissent bien trop rapidement. Il est assez impossible de calculer les 20 premiers termes puisque le 20ème terme, si on arrive à le calculer aurait au moins 1 milliard de chiffres. Oui ça fonctionne mais ça s'arrête assez vite, faute de moyens pour calculer des nombres premiers aussi grands. 4 ans plus tard, en 1951, Wright en trouvait une autre, du même genre mais dont les nombres premiers grossissent en taille encore plus rapidement, tellement que le 5ème terme est vraiment hors de portée des ordinateurs actuels. Un informaticien acharné a réussi à se rendre à 4 et a jeté l'éponge pour ce 5ème terme.

À mon avis, la 4ème approche était celle qui me parlait le plus, encore fallait-il trouver mieux. Mon but était de trouver une formule efficace qui puisse en donner au moins 100. En fait, j'en ai trouvé quelques-unes. Mais il y a quelque chose que je ne comprends toujours pas. Selon les résultats connus, une chose semble assez certaine : c'est difficile de produire des premiers. Pour trouver le polynôme qui donne 58

valeurs premières il a fallu 6 mois de calcul. Les 2 formules de Mills et Wright fonctionnent mais ne sont vraiment pas spectaculaires, la formule de Mills produit une dizaine de nombres premiers et après ça devient impossible à digérer même pour un ordinateur puissant. La formule de Wright est encore pire, on ne se rend qu'au 4ème terme. Un autre résultat récent est le suivant. On a réussi à trouver 27 nombres premiers en progression arithmétique : progression arithmétique veut dire que les 27 nombres premiers ont le même écart entre eux. Et ce résultat est le meilleur connu, lui aussi a demandé d'importantes ressources informatiques.

Donc au mieux, on en a 58 en brochette. Et pourtant, en concoctant un programme numérique, en 2-3 heures j'ai pu produire une liste de 899 nombres premiers qui sont générés avec une formule vraiment simple, la voici. Si c = 999982,680769… alors la suite { c^k } donne 899 nombres premiers d'affilée. Ici { } veut dire qu'on prend l'arrondi ou l'entier le plus près. On a donc, 999983, 999965361839, 999948043207944541, … ça augmente en taille à raison de 6 chiffres de plus à chaque terme. J'ai mis au point un programme qui permet de trouver à partir d'à peu près n'importe quel nombre, une suite de premiers. La plus petite qui soit intéressante commence à 179. Ici on a le c = 178,62634259… La suite des premiers augmente moins vite mais arrête à 24. Elle se lit comme suit :
179, 31907, 5699497, 1018080277, 181855956409, …
Si c est de de l'ordre du milliard alors la suite des premiers générés pourra dépasser un million de termes.

Encore mieux, j'ai trouvé une façon d'aplatir la formule de Mills. Au lieu d'avoir l'exposant 3, j'ai fait un exemple où l'exposant est 1,01 (101/100). Donc aussi dans ce cas, en programmant une boucle simple, en quelques heures de calcul on arrive à trouver bien mieux que la formule de Mills. Ça donne donc, avec la notation de la formule de Mills que si A = $10^{500} + 961.4993763378\ldots$ alors

$$\left[A^{1,01^n}\right]$$

Donnera une suite de 100 nombres premiers. Il est vrai que le premier terme est à première vue assez gros puisqu'il a 500 chiffres. Mais voilà, justement il est gros mais n'augmente pas en taille si rapidement, tellement qu'en fait on peut se rendre à 100 termes, ce qui était mon but au départ.

Le programme que j'ai mis au point, j'en ai toute une famille en fait est relativement simple. J'utilise la méthode de Monte-Carlo et le principe du recuit. Aussi étrange que ça paraisse, la méthode de Monte-Carlo est très efficace et comme son nom l'indique est basée sur le hasard. C'est en utilisant des nombres au hasard que le programme démarre. Ensuite c'est le principe du recuit, ce principe est qu'en fait on garde les bonnes solutions qu'on remet au fourneau, on le recuit à un point donné précis. En ajustant la quantité de nombres au hasard et le point où on doit recuire (remettre la valeur dans le programme) on arrive en quelques minutes à produire une formule. La méthode de Monte-Carlo vient du temps où on mettait au point la première bombe atomique, le savant Stanislaw Ulam avait un oncle qui aimait bien

aller au Casino de Monte-Carlo et qui empruntait de l'argent tout le temps. Ils s'en sont servis pour résoudre des équations très compliquées pour la bombe et qu'ils n'arrivaient pas à résoudre rapidement et précisément. Ils simulaient beaucoup de valeurs et faisaient la moyenne sur la courbe étudiée, cette approche était bien plus rapide et calculait directement les valeurs de la fonction.

Il y a une analogie avec cette méthode et l'histoire fictive suivante. Le commandant d'une brigade veut mesurer la surface d'un lac qui a une forme très irrégulière. Il décide donc de mettre une clôture fixe de 2 km de côtés autour du lac et ordonne à ses hommes de tirer des boulets de canon qui tomberont à l'intérieur du périmètre du lac. Le reste de la garnison étant occupé à compter les obus qui tombent dans l'eau et les autres qui tombent à côté du lac et à l'intérieur du périmètre. Lorsque le nombre de tirs de boulets de canon est suffisamment grand, on aura la surface du lac en faisant le décompte des 2 quantités. Évidemment, tuer tous les poissons d'un lac pour mesurer sa surface est idiot, mieux vaut prendre Google Maps. Cette méthode est très efficace, on peut même la simuler sur Excel, et pourtant Excel n'est pas une bête de calcul. Il faut comprendre aussi qu'aujourd'hui on peut se procurer un ordinateur qui arrive à faire 500 milliards d'opérations en 1 seconde, des modèles un peu plus chers arrivent à en faire 1000 milliards en 1 seconde. En fait c'est tellement rapide en cadence qu'on peut faire une analogie avec la lumière. Ça faisait pas mal de temps que j'utilisais cette

méthode, j'appelais ça le HSG (High Speed Guessing) ou la Devinette à Grande Vitesse. Comme on le sait la lumière parcoure 300 millions de mètres en 1 seconde. Si on imagine un rayon lumineux qui partirait d'un écran d'ordinateur rapide, pendant que le rayon avance en direction de votre œil, même à la vitesse de la lumière, entre 2 opérations de la machine, la lumière n'a même pas le temps de parcourir une distance de 0,5 mm, l'épaisseur de 5 feuilles de papier.

Un dernier argument concerne la compression, si on veut trouver un nombre réel qui permette, moyennant un petit calcul fixe, de générer les nombres premiers alors il suffit de prendre le nombre 0,23571113171923293737… qui est la concaténation des premiers. Il n'est pas difficile de les séparer une fois joints ensemble. Mais quel est le problème alors ? Le problème est qu'il n'y a pas de compression du tout, le taux de compression est de 1 pour 1, c'est de la triche autrement dit. Pour générer le prochain nombre premier il faut connaître le prochain nombre premier, l'argument est circulaire. Si on compare au procédé que j'ai expliqué plus haut, ça commence avec le nombre 999982,680769… et on a besoin d'environ 5500 décimales exactes pour calculer 899 nombres premiers. La taille totale des premiers est 2 428 202 caractères et on a eu recours à 5500 décimales seulement pour les générer, c'est donc une compression de 442 pour 1. En termes économiques, il y a une économie d'échelle en fait. Plus la compression est élevée, meilleure est la

formule. Économie d'échelle voulant dire : économie de calculs ou de temps.

À l'heure actuelle, le plus grand nombre premier connu est $2^{82\,589\,933} - 1$, le nombre a 24 862 048 chiffres. Il a été trouvé grâce au projet GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), des volontaires écrèment tous les exposants de 2 systématiquement à la recherche du prochain record de longueur. Il y a de quoi puisqu'on offre 150 000 $ à quelqu'un parviendrait à trouver un nombre premier de 100 millions de chiffres et 250 000 $ pour 1 milliard de chiffres. Cependant, il y a des conditions qu'eux (le GIMPS) exigent pour reconnaître le record. Dans le même temps, d'autres accumulent les premiers de taille record, titanesque = 1000 chiffres, gigantesque (gigantic en anglais) veut dire 10000 chiffres, megaprime = 1 million de chiffres et parmi ces chasseurs de premiers, un autre groupe cherche les grands nombres premiers probables. Le record est de 8177207 chiffres mais n'est pas considéré par les puristes comme prouvé premier même si comme je l'expliquais plus haut, la probabilité est astronomiquement faible d'avoir un nombre composé. Ce nombre énorme est constitué que du chiffre 1 en base 10. C'est 111....111 répété 8177207 fois. Certains sont même allés plus loin dans le raisonnement et ont affirmé qu'à toute fin pratique, le test de Fermat avec la base 2 suffit pour dire que p est premier quand p est très grand. Je suis plutôt d'accord avec cette affirmation. À mon avis dans pas si longtemps ce sont ces nombres premiers probables qui partageront le podium. Encore une fois,

une réalité mathématique calculée, numérique est en train de dépasser la mathématique exacte, formelle ou certaine à 100%. Dernier détail, pour tester un candidat premier avec les nombres de Mersenne (nombres premiers de la forme $2^p - 1$), il faut plusieurs semaines de calcul sur un ordinateur bien costaud.

Chapitre 9

L'algorithme LLL

En 1982, trois mathématiciens (Lenstra, Lenstra, et Lovász) mettent au point un algorithme assez nouveau, l'algorithme LLL. La nouveauté était également le fait que celui-ci s'exécute en temps polynomial. Le temps polynomial signifie que c'est faisable pour un ordinateur. Un exemple est la multiplication des grands nombres. Si on multiplie 2 nombres disons de 10 chiffres ensemble, le résultat sera de 20 chiffres. Pour ce faire on utilise la méthode de l'écolier en multipliant un à uns les chiffres. Pour 10 chiffres il y a 100 multiplications à effectuer plus la somme à la fin mais ici on ne la compte pas. Si le nombre à multiplier contient 1 000 000 de chiffres il y aura 1000 milliards de multiplications à faire. Cette méthode naïve est totalement inefficace pour la multiplication de grands nombres. On dit alors que la 'difficulté' de la méthode est de l'ordre de n^2. Quand un algorithme est de difficulté n^2 on dit que ça demeure faisable, quand c'est n^3, ça reste faisable mais de portée limitée. Si c'est plus que n^3 ça devient trop lourd, un cout en temps exorbitant. Donc si un algorithme est de difficulté polynomiale, en autant que ce soit de degré peu élevé : c'est réalisable. C'était le cas avec l'algorithme dit LLL. Mais qu'est-ce que ça fait l'algorithme LLL ? Cet algorithme permet de résoudre

(entres autres) un vieux problème lié aux nombres réels. Il permet de trouver la bonne combinaison de plusieurs nombres réels qui s'annulent entre eux. Ça peut sembler sibyllin comme phrase mais c'est très puissant comme algorithme. Voici un exemple, on sait que d'un polynôme à coefficients entiers on peut trouver assez rapidement les racines de ce polynôme. On utilise la méthode de Newton qui est très efficace. Il y a un théorème important en algèbre qui dit : *Tout polynôme de degré n a n racines*. Il y a plusieurs énoncés du même théorème, c'est l'un d'entre eux. Mais si on veut aller en sens inverse, c'est assez difficile. À partir d'un nombre réel (à une précision donnée) comment peut-on trouver le polynôme dont ce réel est racine ? L'algorithme LLL permet justement de résoudre ce problème en une fraction de seconde. Ce théorème important de l'algèbre est appelé le Théorème Fondamental de l'algèbre. Ce que l'algorithme LLL fait est exactement l'inverse d'un théorème important, ce n'est pas rien. Ça fonctionne comme suite, on a un nombre α et on cherche une combinaison d'entiers $k_1, k_2, k_3, \dots k_i$ et de nombres réels $a_1, a_2, a_3, \dots a_i$

$$\alpha = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \cdots a_ik_i$$

De telle sorte qu'il y ait égalité. L'égalité ici est à une certaine précision numérique. Par exemple, avec le nombre 3.146264369941972… , on suppose qu'il est racine d'une équation à coefficients entiers. Ici α est 3.146264369941972… , ça revient à trouver si les puissances de α s'annulent moyennant qu'on ait trouvé la bonne combinaison. Avec l'algorithme on trouve rapidement que α est l'une des racines de l'équation :

$$x^4 - 10x^2 + 1$$

La racine cherchée était (en résolvant l'équation) : $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Ça semble simple et facile à trouver mais ce n'est qu'au début des années 1990 que des programmes informatiques survinrent à trouver cette équation (ou la solution avec radicaux). À l'heure actuelle on est capable d'aller chercher des équations de degré au-delà de 100. Il y a mieux encore, le programme est capable de dire : Les 3 nombres : π, e et γ ne sont pas reliés entre eux par une combinaison simple d'entiers en deçà de 2000 décimales. Ce genre de question (savoir si 3 nombres sont possiblement reliés) plonge en plein milieu de la théorie de la transcendance. C'est une partie des mathématiques qui est très ardue. Les résultats de cette théorie se comptent sur le bout des doigts, les progrès sont très lents. Ils sont lents parce que c'est extrêmement difficile de prouver par exemple que $\pi + e$ est dans la même classe que π. Ou que $\pi \times e$ l'est aussi. Par contre avec LLL on peut dire en 1 minute : Que la somme ou le produit de ces 2 nombres ne semble pas être algébrique (racine d'une équation) ou même rationnelle en deçà de 2000 décimales. L'argument est un peu le même qu'avec les nombres premiers probables. Encore une fois, les 2 réalités des mathématiques se rejoignent sur les mêmes questions. Je connais un mathématicien expert en théorie de la transcendance, ses travaux sont pour moi illisibles. Ça ne veut pas dire qu'ils n'ont pas de valeurs, ils en ont. Ceux qui débroussaillent dans ce domaine sont des acharnés, le mot n'est pas trop fort. Il existe depuis le début des années 90 un petit programme qui fait le

calcul du LLL, les 2 versions sont lindep ou algdep, lindep pour linear dependance et algdep pour algebraic dependance. Ça donne la réponse en quelques secondes. Le petit programme est Pari-Gp, fabriqué de toute pièce à l'Université de Bordeaux, c'est le meilleur dans son domaine, les calculs mathématiques de grande précision et très pointus. Il est gratuit en plus. C'est ce programme qui a trouvé la formule de π en 1 seconde. Comme je disais au début, j'ai mis 20 ans à formuler la bonne question, 1 mois pour trouver comment mettre les morceaux pour que Pari-Gp grignote les chiffres correctement et 1 seconde pour qu'il trouve la formule. J'avais demandé à Henri Cohen, le principal artisan de ce programme qu'est-ce Pari-Gp voulait bien dire. Ça veut dire Pari de Pascal, Grande Calculette Programmable. Pascal de Blaise Pascal qui comme on le sait peut-être est celui qui a fabriqué la première machine à calculer. Ce programme fait maintenant partie de l'inverseur. Le programme de l'inverseur compte 29400 lignes de code Maple.

Et ça sert à quoi au juste ? Par exemple à trouver quelles sont les combinaisons de constantes qui s'annulent comme pour les 3 suivantes : π, $arctan(1/2)$ et $arctan(1/3)$ on a la combinaison -1, 4, 4. Qui veut dire que

$\pi/4 \ = \ arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3})$

Et qu'avec $arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $arctan(1/239)$ on a celle-ci ;

$$\pi = \ 16\, arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\, arctan(\frac{1}{239})$$

C'est la combinaison 1, -16, 4.

Cette dernière a été trouvée par John Machin en 1706 et a permis de calculer 100 décimales de π. La formule est intéressante à cause du 1/5 qui en base 10 est facile à calculer puisque la fonction $\boldsymbol{arctan}$ utilise des puissances impaires de 1/5. Quant au terme 1/239, si on fait les puissances de ce nombre la convergence est rapide. Comme on peut le savoir déjà, la fonction $arctan(x)$ a un développement en série infinie qui se lit comme suit.

$$\arctan(x) = \ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots$$

Dans notre série ici avec $x = 1/5 \ et \ 1/239$, ce sera donc des puissances de ces nombres divisés par les nombres impairs.

Mais voici une image qui explique le procédé de trouver la bonne combinaison si on a un groupe de constantes. Ici par exemple la constante $\zeta(3)$ qu'on sait égale à la somme des inverses des cubes

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = 1{,}2020569031\ldots$$

Le problème avec cette dernière est qu'elle est comme difficile à craquer. Craquer voulant dire trouver de quoi elle est faite en son cœur. Est-ce une combinaison de puissances de π ? En effet on connait les autres du même genre mais les exposants sont pairs comme

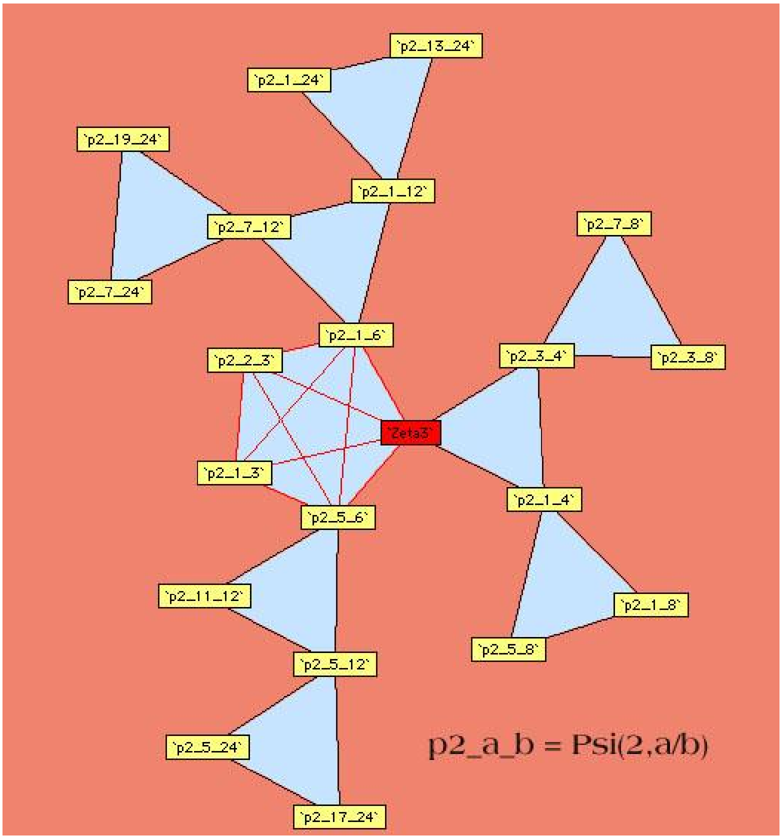
$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449\ldots$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}0832\ldots$$

Mais la constante $\zeta(3)$ résiste. Ce que l'on sait est qu'une certaine fonction appelée Ψ permet certaines combinaisons qui sont un peu biscornues comme

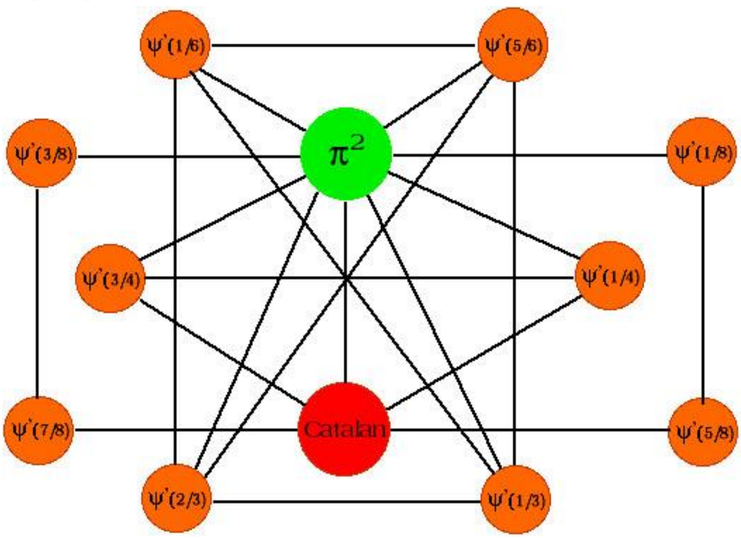
$$\zeta(3) = -\frac{\Psi''\left(\frac{1}{3}\right)}{52} - \frac{\Psi''\left(\frac{2}{3}\right)}{52}$$

La fonction Ψ, est une cousine de la fonction Gamma rencontrée avant. La question est, oui mais y a-t-il d'autres formules du même genre ? Voici la réponse sous forme graphique.



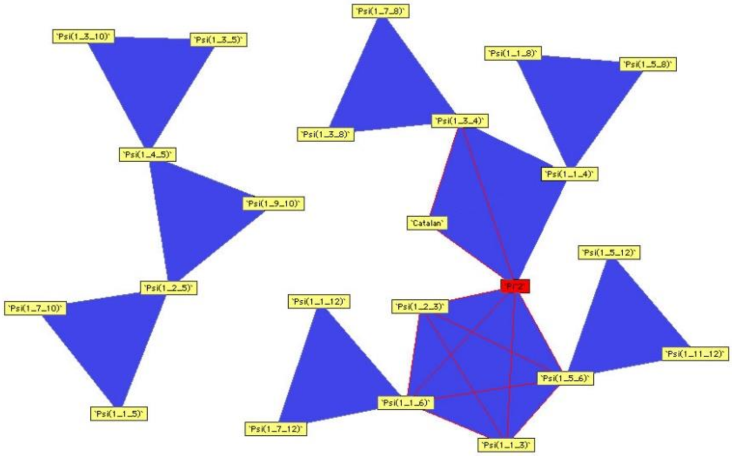
On reconnait le triangle avec $\Psi''\left(\frac{1}{3}\right), \Psi''\left(\frac{2}{3}\right)$ et $\zeta(3)$. L'encodage des formules ici est simplement une

figure fermée qui joint 1 constante (ici $\zeta(3)$ au centre). Les coefficients en fait ne sont pas essentiels, ce qui l'est est le fait que certaines valeurs se combinent et d'autres pas. Le pentagone au centre signifie que les 5 constantes combinées avec des entiers donne 0 comme résultat. Le zéro voulant dire qu'il y a une solution si on met les bons entiers. Justement l'algorithme LLL permet de les trouver en une fraction de seconde. Si on essaye avec une autre constante comme π^2 et la constante de Catalan on obtient ce graphique.



Si on le lit correctement ça veut dire que π^2 est une combinaison de la fonction en 1/4 et 3/4. On peut se demander en regardant ces graphiques et les combinaisons si au fond les constantes ne seraient pas comme des atomes d'une substance inconnue ? Un peu comme avec la chimie et les atomes de carbone, oxygène, hydrogène qui forment des figures géométriques intéressantes. Je me suis sérieusement

posé la question à un moment donné. Quelques fois le graphique montre qu'il y a des combinaisons inattendues comme ici.



On voit bien que π^2 se combine avec Catalan et la valeur de la fonction en ¼ et ¾ mais pas avec les valeurs 3/8, ¾ et 7/8.

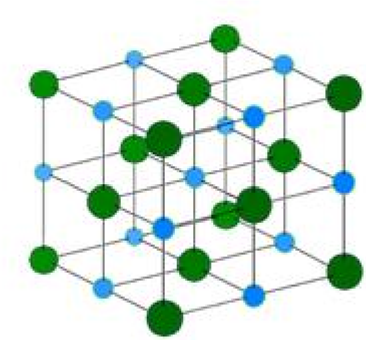
Pour produire ces graphiques j'avais un petit programme qui prenait les valeurs avec des noms (étiquettes) et qui permettait de faire le graphique tout seul en autant qu'on ait la table des relations sans tenir compte des coefficients. Ce qui est intéressant est le graphique ou la relation des constantes entre elles, les coefficients ne sont pas importants. Tout ce qu'on a besoin de savoir est : existe-t-il oui ou non des entiers appropriés qui permettent d'avoir le résultat qui est 0 ? Le programme comme je le disais est très puissant mais aussi il y a du pain sur la planche parce qu'il existe un bon paquet de constantes inconnues, incongrues qui ne cadrent avec rien d'autre qu'elles-mêmes. Si on jette un œil au livre de S. Finch qui en a catalogué près de 4000,

1.0250590965 ...	With Lenz–Ising constants [5.22]
1.0306408341 ...	$\pi^2/(6\ln(2)\ln(10))$; Lévy's constant [1.8]
1.0309167521 ...	2nd Bendersky constant, with Glaisher–Kinkelin [2.15]
1.0346538818 ...	One of the Meissel–Mertens constants [2.2]
1.0451637801 ...	Li(2); with Euler–Gompertz constant [6.2]
1.0471975511 ...	$\pi/3$; with universal coverage constants [8.3]
1.0478314475 ...	One of the quadratic recurrence constants [6.10]
1.0544399448 ...	With Landau–Ramanujan constant [2.3]
1.0547001962 ...	One of the self-avoiding walk constants [5.10]
1.0606601717 ...	With DeVicci's tesseract constant [8.14]
1.0662758532 ...	With Lebesgue constants [4.2]
1.0693411205 ...	One of Pólya's random walk constants [5.9]
1.0786470120 ...	One of Pólya's random walk constants [5.9]
1.0786902162 ...	With Sobolev isoperimetric constants [3.6]
1.0820884492 ...	With hyperbolic volume constants [8.9]
1.0873780254 ...	One of Feller's coin tossing constants [5.11]
1.0892214740 ...	With Vallée's constant [2.19]

Extrait de la table du livre de Stephen Finch sur les constantes mathématiques.

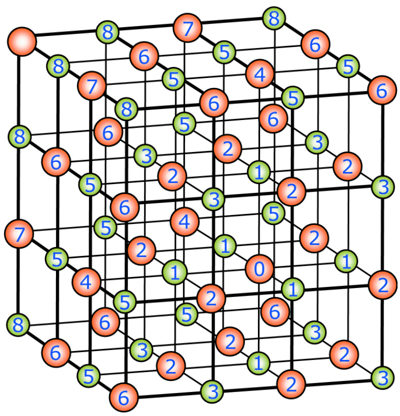
Elles ont toutes un nom et une explication, une ou des formules associées qui sont plus ou moins faciles à calculer. Certaines sont des *tough cookies* (dures à cuire).

Voici un exemple patent au sujet de la constante dite du sel. Le sel ou NaCl est constitué d'atome de sodium et de chlore. Il ressemble à ça et vu de près on a ce cristal.




Graphe du réseau du sel et un vrai cristal de sel.
Image de Wikipedia,

En bleu c'est le Na^{+}et en vert le Cl^{-}. Des physiciens se sont demandés à un moment donné : si on se place au centre du réseau quel est le potentiel électrique ? On suppose ici que le réseau est infini. Le mot n'est pas trop fort puisqu'on peut imaginer facilement qu'un morceau de 3 cm contient des milliards et des milliards d'atomes. On a réussi à faire le calcul en fait de ce potentiel électrique. On pose un certain atome au centre et on regarde dans toutes les directions à la fois et on mesure qu'elle est la valeur du potentiel électrique.



Cristal de sel avec les atomes numérotés.

Une fois le calcul assez fastidieux on obtient une valeur, cette valeur est connue comme étant la constante de Madelung ou la constante du sel. Sa valeur numérique est 1.74756459463318… et là on est bloqué. Le calcul qui a réussi à être fait est long et difficile. Mathématiquement la série converge très lentement. J'ai

essayé longtemps de trouver quelque chose avec cette constante difficile et je ne suis pas le seul à avoir essayé. Cette structure cristalline simple est l'une des plus simples et personne n'a réussi à simplifier ou trouver de quoi la constante est faite. On pourrait toujours dire que oui c'est facile, la constante est faite de sel. C'est l'un de ces cas où les mathématiques exactes ou formelles n'avancent pas loin et le calcul numérique non plus. Des constantes comme ça il y en a toute une famille. Ce sont les constantes de Madelung, il y en a une pour chaque type de cristal en fait. Elles sont toutes également rébarbatives.

En voici quelques-unes trouvées avec l'algorithme en 2006 avec π et la fameuse fonction Zeta. Attention la prochaine image n'est pas pour les enfants.

$$\pi = 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{\pi n}-1)} - 96\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{2\pi n}-1)} + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{4\pi n}-1)}$$

$$\zeta(3) = \frac{\pi^3}{28} + \frac{16}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{\pi n}+1)} - \frac{2}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{2\pi n}+1)}$$

$$\zeta(5) = 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\pi n}-1)} - \frac{259}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{2\pi n}-1)} - \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{4\pi n}-1)}$$

$$\zeta(5) = \frac{-7}{1840}\pi^5 + \frac{328}{115}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\pi n}-1)} - \frac{419}{460}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{2\pi n}-1)}$$
$$- \frac{9}{115}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{3\pi n}-1)} + \frac{261}{1840}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{6\pi n}-1)} - \frac{9}{1840}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{12\pi n}-1)}$$

$$\zeta(7) = \frac{304}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7(e^{\pi n}-1)} - \frac{103}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7(e^{2\pi n}-1)} - \frac{19}{52}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7(e^{4\pi n}-1)}$$

$$\zeta(9) = \frac{64}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{\pi n}-1)} + \frac{441}{20}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{2\pi n}-1)} - 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{3\pi n}-1)}$$
$$- \frac{4763}{60}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{4\pi n}-1)} + \frac{529}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{6\pi n}-1)} - \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{12\pi n}-1)}$$

Les nombres de Bernoulli et d'Euler

Les nombres de Bernoulli ont été découverts par Jacques Bernoulli, l'un des frères Bernoulli aux alentours de 1678. Ces nombres B_n se lisent comme suit :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

Ne sont comptés que ceux qui sont pairs, ceux de rang impair sont tous zéro sauf le premier. Ils sont tous rationnels et disons-le : étranges. Au début ils croissent lentement mais ça augmente rapidement, très rapidement. B_{50} est rationnel et déjà d'une bonne taille et B_{1000} est un monstre.

$$B_{50} = \frac{495057205241079648212477525}{66}$$

$$B_{1000} = -\frac{\text{Nombre de 1779 chiffres}}{34299903066}$$

On connait des nombres cousins des nombres de Bernoulli : Les nombres d'Euler. Ils croissent tout aussi rapidement mais ont un air plus normal. La suite des nombres d'Euler se lit comme suit : 1, 5, 61, 1385, 50521, 2702765, 199360981, 19391512145,... Comme ceux de Bernoulli, le signe alterne une fois sur deux mais il y a plusieurs façons de les exprimer, ici est la plus simple. L'une des propriétés de ces nombres est la

parenté avec π. En effet, une très bonne approximation des 2 nombres est

$$B_{2n} \approx \frac{2n!}{(2\pi)^n}$$

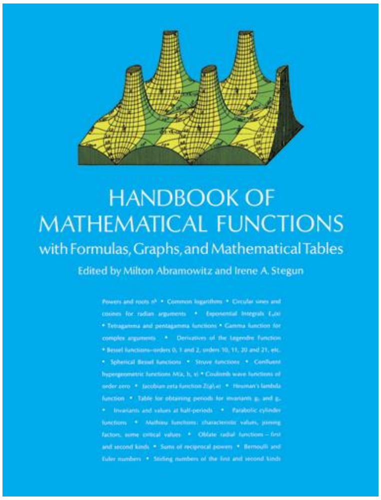
$$E_{2n} \approx \frac{4 \cdot 2^n n!}{\pi^{n+1}}$$

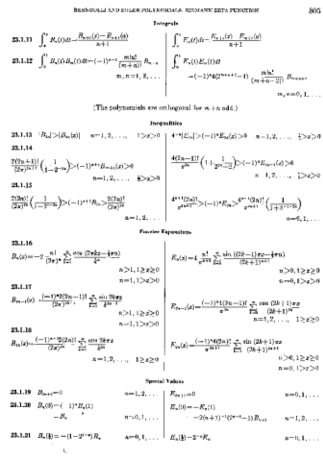
Ici est la version simplifiée, sans tenir compte du signe éventuel. Quand je dis très bonne approximation je veux dire ceci :

$$B_{1000} \approx \frac{2 \cdot 1000!}{(2\pi)^{1000}} = 5{,}3187044694155 \times 10^{1769}$$

$$E_{1000} \approx \frac{4 \cdot 2^{1000} 1000!}{\pi^{1001}} = 3{,}8875618412530 \times 10^{2371}$$

Sont précises à 301 et 477 décimales de précision, c'est assez phénoménal comme approximation. On ne parle pas ici d'une simple approximation mais d'un calcul qui est pratiquement exact. Je connaissais depuis longtemps ces formules puisqu'elles apparaissent dans le fameux livre de Milton Abramowitz et Irène Stegun : *Handbook of mathematical functions*.





Le fameux livre et un extrait à la page 805

Ce livre est la bible de l'analyse numérique, ça été mon livre de chevet à partir de 1975. C'est justement à la page 805 que j'avais trouvé ces 2 approximations des nombres de Bernoulli et Euler. Quand j'ai vu le livre publié chez Dover dans une librairie j'ai sauté dessus. 1059 pages de chiffres et de formules, que du bonheur. Tous les trucs du métier s'y trouvent, j'ai beaucoup appris avec ce livre. Muni de ma calculatrice HP-67 et cette brique j'ai passé des journées entières à calculer des constantes. À l'époque, cette HP-67 était une merveille. Munie d'un lecteur de cartes magnétiques pour les programmes. Elle m'avait couté 600 dollars en 1976. Cette même formule m'a permis de trouver une permettant le calcul direct de la nième décimale de Pi en base quelconque en 2022, après 48 ans de recherches, la voici.

$$\pi \approx \left(\frac{2n!}{B_n 2^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\pi \approx \left(\frac{(2n)!\,2^{2n+2}}{E_{2n}}\left(1-\frac{1}{3^{2n+1}}\right)\right)^{1/(2n+1)}$$

La première permet le calcul en base 2 et la seconde en base 10. L'astuce consiste à tronquer à la position n pour avoir 'la' décimale à cette position. Il y a plusieurs choses de frappantes, la première est que la formule pour la base 2 est assez simple, élégante et concise. Celle en base 10 est un peu plus compliquée. La 2ème surprise est que cette formule (sous forme déguisée) apparaît dans ce fameux livre de Abramowitz et Stegun depuis pas mal de temps et est très connue, elle n'apparaît pas comme tel, c'est en isolant le π qu'on la trouve. Isoler le nombre π dans une formule aussi simple n'est pas exactement une découverte. Elle aurait très bien pu être trouvée par Euler. La bonne question est : oui mais comment se fait-il qu'une formule aussi simple qui donne π à la nième décimale soit passée inaperçue depuis tout ce temps ? Ces nombres de Bernoulli ou Euler sont très connus et pourtant jamais personne n'avait pensé à les utiliser pour calculer π et en plus à une position donnée. En fait une partie de la réponse vient du fait que ces nombres de Bernoulli contiennent une grande quantité d'information mais que personne semble-t-il n'avait pensé à utiliser de façon efficace. C'est exactement ce qui s'est passé en 1996 lorsque j'ai découvert qu'en fait on pouvait utiliser π (encore lui) pour justement calculer

les nombres de Bernoulli de façon très rapide. À ce moment, je me suis mis à les calculer, d'abord B_{10000} et jusqu'à B_{750000} en 2002. Ce qui a donné l'idée bien sûr à quelques personnes qui s'y sont mis pour finir avec des programmes bien plus performants que le mien. Résultat des courses, les logiciels de Maple, Mathematica et Pari-Gp utilisent tous le truc. Avec le temps on s'est aperçu que cette propriété magique qui permet de calculer les Bernoulli avait été pensée dans les années 70. La publication de mes résultats a remis au moins les pendules à l'heure. Le lien qui permet de prendre les Bernoulli et d'en utiliser les propriétés pour coincer le nombre π, là c'est moi qui ai visé juste.

La HP-67 avec une carte magnétique et ma HP-35S aujourd'hui.

J'ai usé jusqu'à la corde cette calculatrice, mais bon, quand les premières versions de Maple sont apparues pour le Macintosh en 1989, ça devenait un peu obsolète. Maple contenait tout ça et en plus on pouvait calculer à 1000 ou 10000 décimales en 1 seconde. Le réflexe de la sortir pour vérifier un calcul est toujours présent

puisque même encore aujourd'hui je ne sors jamais sans ma HP-35S.

En 1996, je me mets à calculer des nombres de Bernoulli sur Maple, après quelques essais je m'aperçois assez vite que le programme commençait sérieusement à ralentir vers B_{1000}. Je m'étonne de la lenteur et demande à mon collègue du centre à Vancouver (Greg Fee) qu'elle pouvait bien être la cause. On s'aperçoit que le programme utilisait une formule combinatoire assez compliquée. Et qu'en fait la machine calculait tous les nombres de Bernoulli jusqu'à 1000 pour finalement arriver à B_{1000}. Donc pour se rendre à B_{2000} il aurait fallu calculer encore plus. Ça semblait impossible et devant le temps que ça prenait j'ai vite compris qu'il y avait un problème de définition. Mais pourquoi ne pas calculer directement B_{1000} ? Connaissant cette approximation avec ma constante préférée π et je me disais mais que manque-t-il ? Ce qui manquait était connu en fait, c'était relié à la fameuse fonction ζ (Zeta) de Riemann. La formule était :

$$\zeta(2n) = \frac{2\pi^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$$

Cette fonction $\zeta(n)$ ou $(2n)$ et B_{2n} est pris en valeur absolue. Mais on sait que

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

C'est la somme des inverses des entiers à la puissance 2n. Si $2n = 1000$, on s'en doute la somme infinie sera très près de 1. C'est ce qui manquait pour avoir

exactement B_{2n}. En gros, c'était au final assez simple, on partait avec une très bonne approximation avec π et on corrigeait le tir avec quelques termes de la fonction ζ, l'équivalent de 2 coups de cuiller à pot. Pas de formule combinatoire compliquée, la formule directe est bien plus rapide. Je fais quelques tests avec Greg Fee qui était un crack de Maple puisqu'il était l'un des programmeurs de cet engin. On met au point une rustine rapide et on arrive à calculer B_{10000} en 2 minutes. Bien contents du résultat je décide de poster ça sur les *newsgroup* pour voir si quelqu'un pouvait faire mieux. Je ne reçois que des ???. On décide alors de poster la valeur de B_{30000}, là ça commence à réagir. Plus tard dans l'année j'annonce le calcul de B_{100000}. Personne ne s'était jamais rendu aussi loin. Le record a tenu jusqu'en 2002, à cette époque j'ai poussé mon vieux pc à la limite en calculant B_{750000}. Après ça, l'idée a fait son chemin et certains s'y sont mis bien sûr pour faire mieux jusqu'à $B_{100\,000\,000}$. Maintenant la rustine a été implantée dans Maple, Mathematica et Pari-Gp. Je n'ai reçu aucun crédit pour cette trouvaille. Certains se sont même attribué la découverte après les faits, ça c'est facile à faire. J'ai tout de même publié un article en 2006 où j'annonçais mon calcul inédit pour recevoir des commentaires de ceux-là même qui s'étaient attribué la découverte. J'ai quand même laissé l'article sur le site ArXiv (un site de dépôt d'articles gratuit). Ce qui est étonnant encore aujourd'hui est que beaucoup de sites, d'articles et même de livres parlent beaucoup du calcul efficace des nombres de Bernoulli en déroulant de grosses formules alors que la formule qui est de loin la plus simple est

celle que j'avais déniché dans le livre d'Abramowitz et Stegun. La même histoire à propos du calcul des nombres d'Euler se profile. On peut faire la même chose pour le calcul des nombres d'Euler. On peut calculer le nième nombre d'Euler en utilisant une bonne approximation avec π + une correction. Si le temps le permet je calculerai $E_{1000000000}$ une bonne fois.

Les subventions de recherche

À la fin de 1999 j'étais à l'emploi d'une grosse société informatique à Montréal et tout d'un coup j'en ai eu marre et j'ai tenté le saut sans parachutes. J'ai démissionné et décidé de me lancer dans la recherche mathématique à temps plein, advienne que pourra. Ça a presque marché, à l'Université du Québec on décide de me nommer professeur associé. C'était un titre bidon pour être en mesure de faire une demande de subvention de recherche. Une amie de l'UQAM me décroche un poste de suppléant dans une école à Laval (Québec) pour des cours de mathématiques aux adultes. J'ai commencé ce cours avec une certaine appréhension, ne trouvant rien dans les CÉGEP j'en avais conclu qu'on doit me trouver très mauvais. Mais à ma grande surprise, le cours de mathématiques s'est plutôt bien passé et même que les étudiants avaient beaucoup apprécié. Je prépare un dossier pour le CRSNG (l'équivalent du CNRS au Canada). Le dossier expliquait que j'avais réussi à trouver l'algorithme et la formule de π et que j'avais une piste pour faire la même chose avec les nombres premiers. La demande est rejetée. Un peu

déçu de cette décision je décide de fouiller le site du CRSNG, ayant une ligne haute-vitesse à la maison, je mets un robot indexeur sur leur site après avoir tout pompé du site. Je découvre alors qu'on parlait de ma découverte dans leur rapport annuel l'année précédente. On disait que la recherche mathématique se portait plutôt bien au Canada puisque des mathématiciens canadiens avaient réussi à trouver une formule qui permettait de calculer π en binaire sans avoir à calculer les autres chiffres avant. Je fais appel de cette décision et leur mentionne que tout de même j'étais l'auteur de cette formule dont ils parlaient dans leur rapport annuel. L'appel a été rejeté sans aucune explication. Dépité je suis retourné sur le marché du travail à la même société où j'avais démissionné. Ça ne s'est pas du tout fait comme je le croyais. Un soir, des amis de la boite m'invitent à aller diner au restaurant, on était un groupe mais avant je devais passer à la boite pour aller au restaurant. Sur place je rencontre mes deux anciennes patronnes qui me disent comme ça : Dis-donc, ça ne tenterait pas de revenir à la boite ? Très surpris je dis oui évidemment. Plus tard on me confie qu'en fait sur l'étage on s'ennuyait, que mes collègues étaient plutôt ennuyants et que moi j'étais plutôt du genre à égayer avec mes blagues à 2 balles. Elles m'ont dit que ma présence allait améliorer l'atmosphère.

Après avoir quitté Vancouver j'avais eu ce poste à Wolfram, ceux qui font le programme Mathematica. Arrivé sur place en mars 1997 on m'installe dans un appartement à 200 m de la boite, mais la boite est à

Champaign en Illinois en plein milieu de la *Corn Belt,* la ceinture de maïs à 160 km de Chicago. Je connaissais bien Mathematica puisque je l'utilisais de temps en temps pour des calculs. C'est un bon programme, il est en général bien plus puissant que Maple mais en fait en pratique c'est un peu lourd comme programmation. J'ai bien essayé de m'habituer à ce langage assez rébarbatif, pour faire un petit calcul ce n'est pas sorcier mais pour faire un programme complet ça devient vite illisible. On se prend vite les pieds dans des commandes cryptiques pour que la sortie au final soit lisible. Même encore aujourd'hui je ne suis jamais arrivé à l'utiliser correctement. Ce que j'ai fait en fait finalement est de programmer une interface, je pilote tout à partir de Maple. Maple est bien plus simple à gérer, il demeure lisible. Des interfaces comme ça j'en ai programmé plusieurs dont un qui utilise un compilateur Fortran. Le Fortran est connu comme la Mustang, c'est une vieille bête qui est très rapide mais lui est encore plus abstrus que Mathematica. À Wolfram (du nom du propriétaire de la société), ils avaient et ont encore une assez bonne équipe pour le *kernel,* le noyau de l'engin. Vers les années 1989 en fait, il y a eu la grande débandade en URSS et beaucoup de très bons mathématiciens se sont retrouvés sur le carreau. Wolfram a flairé la bonne affaire et en a embauché une demi-douzaine qui étaient bien content de quitter l'URSS. Moi entretemps j'essayais de m'habituer au Midwest américain et à cette bande de russes. Ils sortaient souvent le soir en groupe, j'y suis allé avec eux une fois, entre 2 bouchées c'est le petit verre de vodka, poliment je fais comme eux

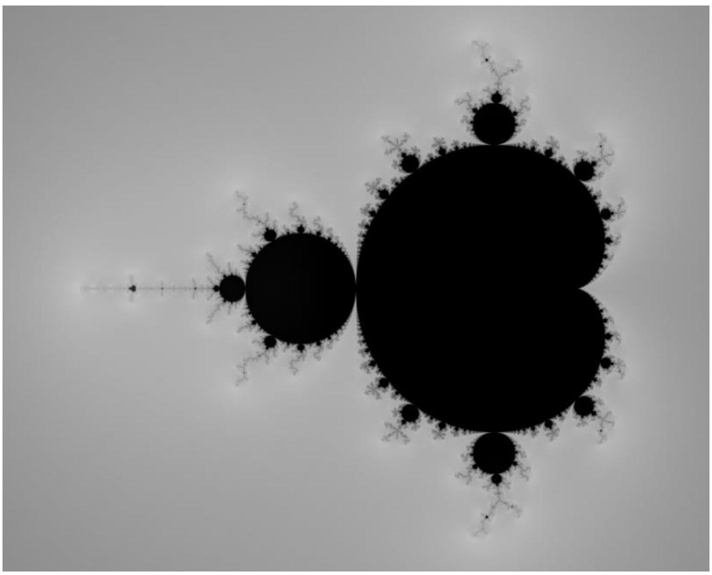
pendant 20 minutes mais j'ai vite arrêté. Je ne suis pas habitué à ingurgiter autant d'alcool surtout qu'en plus c'est une bière que je buvais en mangeant et eux aussi. Leur vodka c'est juste pour rincer, un trou normand mais en continu, ouf. Mais bon, ils étaient sympathiques quand même et de vraies épées en mathématiques bien sûr. Après 5 mois sur place, je n'en pouvais plus de cette vie américaine en plein milieu de nulle part. J'ai démissionné encore une fois, pris toutes mes affaires et avec ma voiture avec une remorque attachée et suis rentré à Montréal d'une seule traite (1526 km). Ce n'est pas prudent de conduire aussi longtemps mais je voulais retrouver un endroit familier à tout prix. Champaign IL est plat, très plat. Il n'y a rien autour, rien à visiter, rien à manger. Il n'y a que ces chaines de restaurant où on ne sert que des frites avec quelque chose. C'est fou mais c'est la nourriture qui me manquait le plus. C'est plat, c'est culturellement un désert, il n'y a que cette bande de russes autour. Ils ne supportaient pas les quelques noirs dans la résidence ou j'étais. Une fois, l'un d'eux me dit, quand on a vu qu'il y avait des noirs dans la résidence on a déménagé. Ils boivent du coca chaud, se payent d'énormes télé qui prennent toute la place dans le salon, ne mangent souvent que de la pizza mais qui sont sympathiques quand même. Une fois dans un restaurant chic il y avait de la soupe au menu de jour. Ah oui ?! De la soupe ? J'en veux bien un bol. Pour m'apercevoir qu'en fait c'était une bouillie avec du fromage *Cheez-whiz* et quelques brocolis, pouah. Finalement je suis resté ami avec seulement une personne à cet endroit. Un programmeur du noyau qui était et est encore le

spécialiste des graphes. Ses programmes étaient illisibles mais quel beau rendu. C’est lui (Michael Trott) qui fait tous les dessins qu’on voit partout, c’est un expert dans ce domaine.

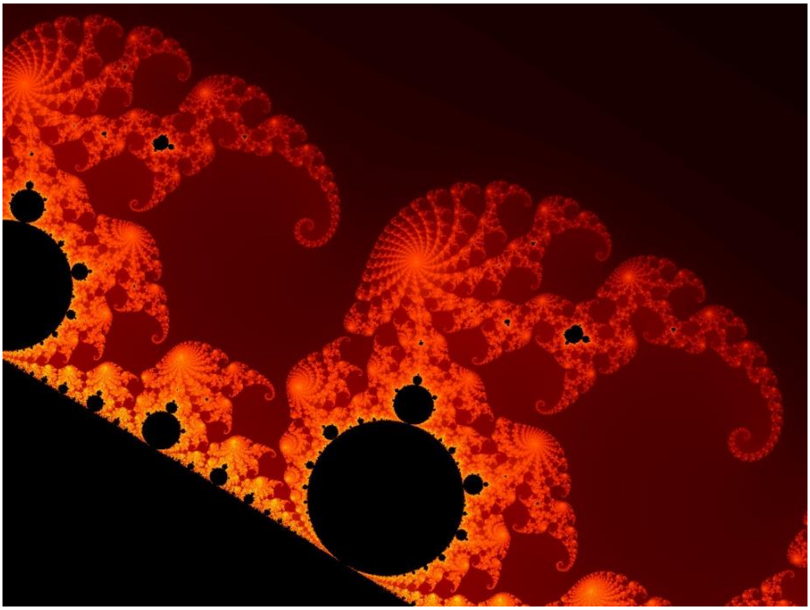
Chapitre 10

Les nombres exotiques

En 2014, j'ai eu une drôle d'idée. C'est la fameuse courbe fractale de Mandelbrot qui m'inspirait. Elle est assez connue mais ce qui l'est pas mal moins est le fait que certains points limites sont algébriques. Algébrique veut dire que c'est dans la même famille que $\sqrt{2}$ ou $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



L'ensemble de Mandelbrot



Détail de la courbe de Mandelbrot si on zoome sur une frontière.

La courbe a la propriété étonnante suivante : elle est autosimilaire. Autosimilaire veut dire que le dessin est le même à toutes les échelles. On peut voir dans la nature des exemples de cette propriété, comme avec le chou romanesco.

La courbe ou le contour est généré avec une formule dite de récurrence. On choisit un nombre quelconque z, on le met au carré et on ajoute une constante.

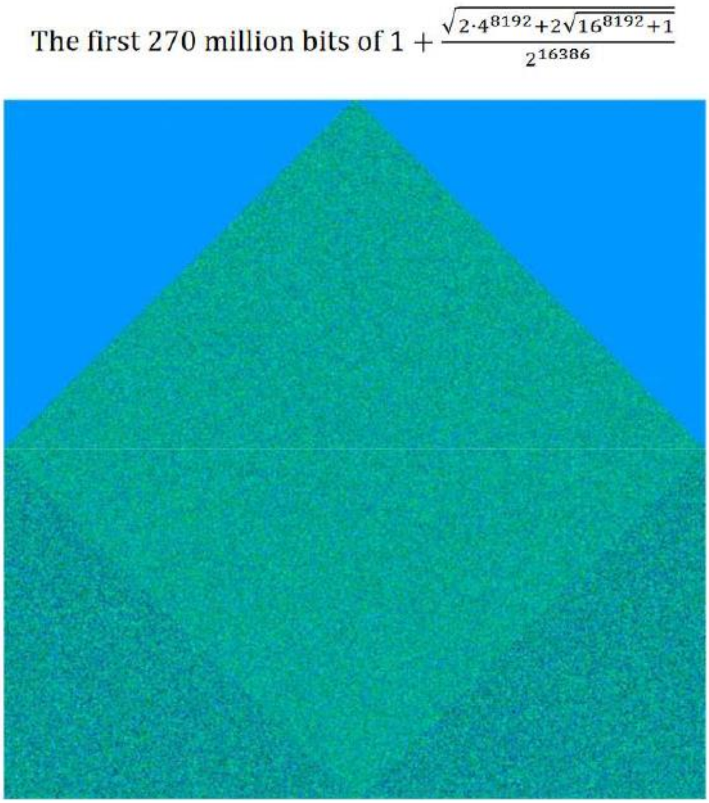
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Mais ici le z est choisi comme un nombre complexe (qui a 2 coordonnées). La chose bizarre est que si on prend n'importe quel nombre ça se mettra soit à tourner, faire un cycle ou bien grossira au-delà de toute limite. La frontière entre ce qui tourne ou reste stable et ce qui s'échappe est justement le contour de la courbe de Mandelbrot, on dit aussi c'est l'ensemble de Mandelbrot étant donné qu'il y a pas mal de points. Cette propriété est une particularité des nombres complexes. Justement ce qui m'intéressait était le fait que si la limite est un nombre connu (racine d'une équation) alors je me disais et si on prenait un point pour s'y rendre. Avec l'autosimilarité j'imaginais que ça devait être intéressant. Oui puisque le contour de la courbe est

autosimilaire mais complètement fou en fait. Je me disais : si on choisit bien la trajectoire alors ça voudra dire qu'on pourra trouver un nombre qui soit racine d'une équation simple mais dont le développement binaire aurait une particularité spéciale ? Ce n'était qu'une supposition, une hypothèse de travail. Je me suis donc mis à calculer des points z très variés et je scrutais la limite à la loupe pour voir si un motif apparaissait dans le développement binaire. L'idée est simple, l'ensemble de Mandelbrot est complètement chaotique on le sait si on approche d'une limite, c'est aussi autosimilaire, donc si j'arrive à trouver la bonne trajectoire, on devrait voir apparaitre un motif ? Mon intuition ne me trompait pas. Il y a un motif, parmi toutes les formules que j'ai pu expérimenter. Si

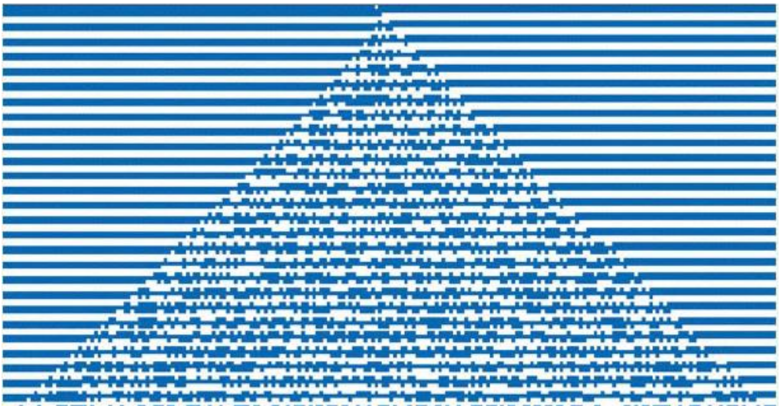
$$f(n) = 1 + \frac{\sqrt[4]{16^{4n} + 1}}{16^n + 1}$$

Alors quand n est grand (de l'ordre de 1000 ou 10000), le développement binaire de ce nombre a un motif très visible qui persiste pour des milliards de valeurs en binaire. Par exemple, si n = 4096 alors à la position 1342238724 on peut voir apparaitre une série de 4118 zéros alignés. Normalement, un nombre du 4ème degré qui est exprimé en binaire contient des 0 et de 1 tous mélangés. Il est pratiquement impossible d'avoir ne serait-ce qu'une trentaine de zéros ou de 1. Donc, si on trouve avec un calcul qu'à certains endroits



il y a de larges plages de 0 : c'est donc qu'il y a un motif très persistant. Pour le voir, il suffit de créer une image noir et blanc teintée en bleu par exemple pour faire sortir le contraste et aligner les 'bits' ou pixel sur une certaine largeur. Par exemple avec la formule

On aperçoit des plages de 0 et de 1. Si on zoome sur une partie on voit de plus près le motif étrange.



On peut le voir également en regardant directement le développement binaire,
Ici par exemple avec $f(100)$ on a

$f(100)$=1.00000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000100000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000001111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111

1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111110110000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000001010011111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111100101
0011000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000

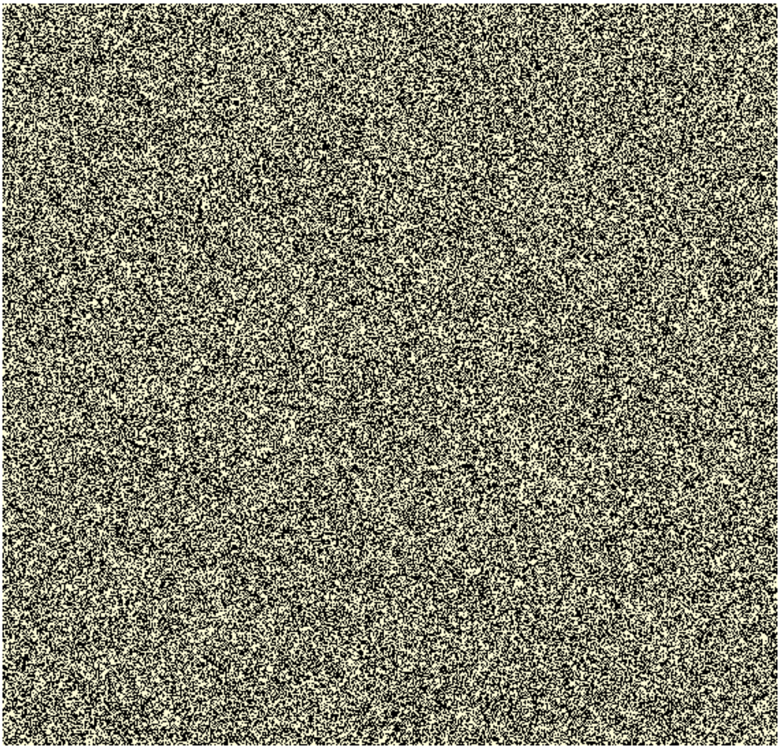
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000010010111111011111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111000110100101111000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000101101010
1011111001111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111…

Ici le motif persiste au moins jusqu'à la position 204000. Ce qui est assez surprenant est le fait que le motif 'mélangé' dure très longtemps. J'ai calculé que si n = 1000000 alors le motif persiste jusqu'à la 80000015000004$^{\text{ème}}$ position en binaire, si n = 1 milliard, la persistance s'étend jusqu'à la position 8.1×10^{18}. On peut alors dire que ces nombres sont assez

exotiques. Ce phénomène pour les réels est assez rare, la plupart des exemples aussi spectaculaires sont habituellement des constructions artificielles. Les valeurs des fonctions qui ont une valeur numérique réelle sont presque toujours bien mélangées. J'ai connu un chercheur qui explorait ce sujet et il n'avait jamais rien trouvé, d'ailleurs ce fait est généralement admis en mathématiques. Les décimales des nombres irrationnels comme $\sqrt{2}$ en base 2 ou 10 sont *random*, les chiffres sont assez totalement au hasard. On a tenté de trouver des motifs en binaire dans les constantes naturelles : ça n'a jamais rien donné. Les chiffres sont tellement bien au hasard par exemple avec π en binaire ou décimal que certains mathématiciens ont avancé qu'en fait c'était une bonne façon de générer des chiffres au hasard, il suffit de prendre quelques décimales de π quelques part. Ce n'est pas ça qui manque puisqu'un calcul a été fait en mars 2024 : plus de 105000 milliards de décimales ont été calculées et on en est encore à réaliser que c'est bel et bien 'assez mélangé'.

Alors comme d'habitude j'ai écrit un court article décrivant la méthode et mes résultats ainsi que quelques images du développement en binaire de ces nombres exotiques. Je n'ai eu aucune réaction, sauf 1 personne qui a fait remarquer que ce n'était pas étonnant et qu'on pouvait faire mieux avec d'autres exemples. J'ai demandé bien sûr, ah oui mes lesquels ?? Aucune réponse. Ces dessins bizarres sont en fait comme des saillies dans les nombres réels. Une image assez commune à propos des nombres réels est que si on les

examine en base 2 c'est comme un mur de béton gris sans aucun motif.

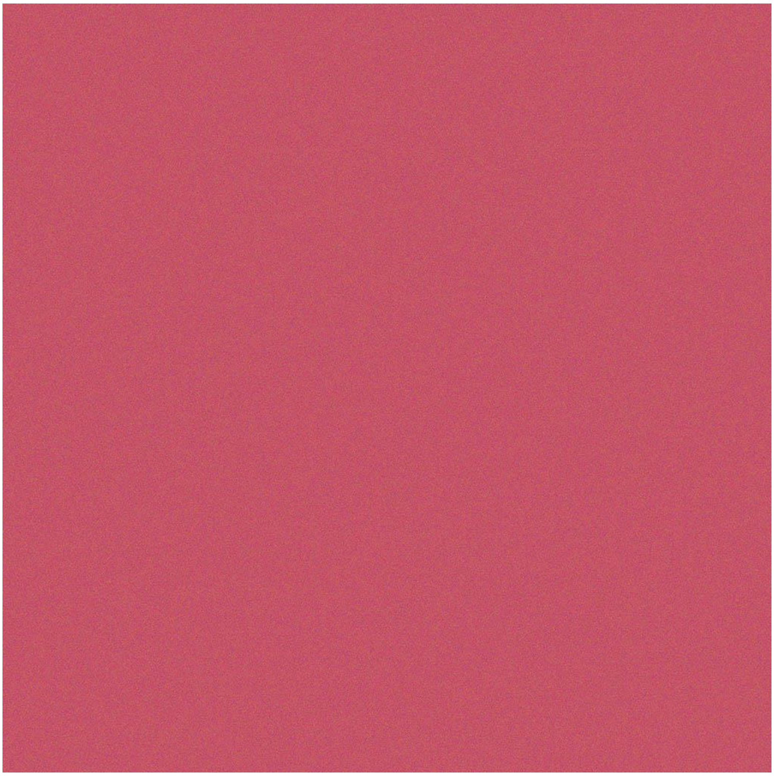


Vu de près du nombre π et binaire, ça ne ressemble à rien.

Plusieurs expériences ont été tentées pour percer le mystère de ce mélange. On a examiné le développement binaire de pas mal de nombres avec des ordinateurs puissants et personne n'a trouvé quoique ce soit, pas le moindre motif dans aucune constante naturelle. Naturelle veut dire une constante issue d'une fonction simple comme ici un nombre du 4ème degré. L'image la plus simple qu'on puisse donner des nombres réels est similaire à un fond gris, un nuage qu'on aperçoit dans le ciel, circulez, il n'y a rien à voir.

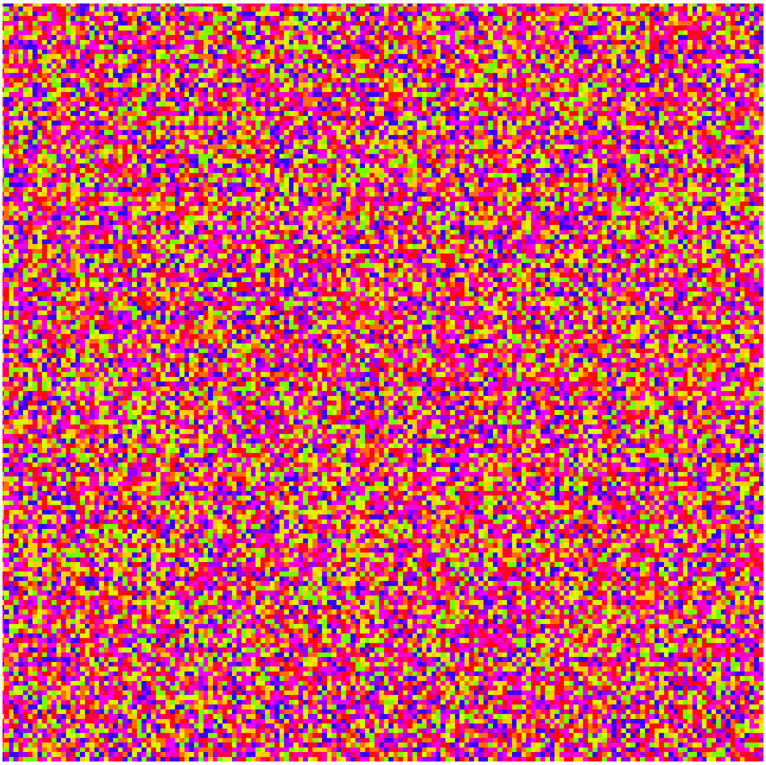
Rien à voir, c'est effectivement le cas avec les décimales de π.

En 2016, Peter Trueb calcule π à 22459 milliards de décimales et sur son blog explique comment il y est arrivé. Il a utilisé ma formule pour la vérification et dit plus loin, si vous êtes intéressé par les décimales, contactez-moi. C'est exactement ce que je fis. 2 semaines plus tard, je reçois un disque dur contenant les derniers 11000 milliards de décimales. J'entrepris alors de faire quelque chose qui n'avait jamais été fait. Tout d'abord une image contenant les 1000 premiers milliards de chiffres en 1 seul bloc. Je voulais vérifier qu'il n'y a rien à voir. J'ai donc fabriqué un programme qui prenait des blocs de 100 millions de décimales exactement et j'ai fabriqué 10000 images de 10000 x 10000 pixels avec les chiffres. En codant, 0 = rouge, 1 = blanc, 2 = vert, etc. On a une représentation de chaque bloc, en voici un. Il n'y a aucun motif, c'est complètement mélangé. L'image ici est mise à l'échelle de la page.



Les premières 100 millions de décimales de π l'échelle est trop petite pour voir le détail puisque l'image fait 10000×10000 pixels. On peut en voir une centaine sur mon site en détail.

On réalise (sans surprise), que les 10000 images sont assez exactement les mêmes et qu'il n'y a aucun motif. J'avais préparé une page web avec ces 10000 images pour voir si quelqu'un aurait un commentaire judicieux à formuler. Je n'ai reçu aucun commentaire. Voici un bloc de pixels pris au hasard sur cette image.



Bloc de chiffres de l'image précédente vue de près

J'ai alors entrepris de faire une autre expérience qui n'avait jamais été tentée. Habituellement quand un calcul de π est effectué, la première chose qui est faite est de voir si les chiffres de 0, de 1, …9, est normal, que la fréquence est à peu près 1/10 pour chaque chiffre. C'est toujours le cas, mais là s'arrêtent les tests, on vérifie quelques blocs tout au plus. Je voulais pour une fois faire un test bien plus poussé avec le premier 1000 milliards de chiffres. J'ai donc concocté des tables de nombres d'une certaine largeur, entre 10 et 14 chiffres. Chaque table était passée à travers le filtre des 1000

milliards de décimales. En d'autres mots, je testais si une chaine connue s'y trouvait. Je me disais, ça ne donnera fort probablement rien du tout mais au moins j'aurai la satisfaction d'avoir tout essayé. J'étais convaincu aussi que j'étais probablement le seul d'assez fou sur la planète à effectuer ce genre d'expérience, mais il faut bien que quelqu'un le fasse une fois. Donc pour chaque table de 100 millions de chiffres de π le filtre constitué de valeurs diverses était passé ou filtré. J'ai passé tout ce que j'avais comme table, une table de nombres au hasard, une table de nombre rationnels simples.
Par exemple, la table des nombres rationnels simple est :

50000000000000
33333333333333
66666666666666
25000000000000
75000000000000
20000000000000
40000000000000
60000000000000
80000000000000
14285714285714
28571428571428
42857142857142
57142857142857
71428571428571
85714285714285

Sans le point décimal bien sûr. J'ai même passé la grosse table de l'inverseur au complet sur les premières 1000 milliards de décimales. Le résultat de l'expérience est

que d'après moi, le premier 1000 milliards de chiffres du nombre π est vraiment aléatoire. Il n'y a apparemment aucun motif. Je garde une trace de toutes ces expériences, j'en suis à 1 750 000 images d'expériences avec les chiffres. Au tout début c'était systématiquement avec un cercle que je représentais les chiffres venant de calculs et plus récemment avec des tuiles carrés ou rectangulaires. Il y a de quoi, pour analyser une image qui est construite avec un programme, le commun des mortels peut utiliser le programme Photoshop bien connu. Il est assez performant puisqu'on peut visualiser une image de 300 000 x 300 000 points ou pixels. Cela représente 90 milliards de chiffres d'un seul coup d'œil. Je l'ai fait avec les 10 premiers milliards de chiffres de la plupart des constantes que j'ai sur disque. À chaque fois je me dis, y'a que moi qui est assez cinglé pour construire des images avec autant de chiffres. D'un autre côté je me dis, il faut bien que quelqu'un essaye. Le problème est que les moyens d'analyse mathématique qui permettraient de détecter un motif sont très limités pour les nombres réels. On ne sait pas comment traiter, analyser, digérer 1000 milliards de chiffres. Les seuls tests officiels qui ont été faits sur tous ces nombres sont des tests statistiques, on compte le nombre de 0, de 1, … jusqu'à 9 (si on est en base 10). On fouille les chiffres pour trouver des motifs simples et pourtant : il est assez simple de construire un nombre qui ne soit pas rationnel et qui a un motif bien défini en base 2 ou 10. En gros, c'est le noir total. Pas étonnant que Cantor soit devenu fou avec ces nombres. Ça rendrait zinzin la plupart des gens, mais bon, moi de regarder des millions

de décimales pendant 1 heure ne me déstabilise pas du tout, ça m'inspire.

Chapitre 11

Les églises en mathématiques

À partir de cette découverte de ces cercles avec des droites qui représentaient un nombre rationnel j'ai cherché en vain ce qui pouvait exister dans la littérature : rien. En demandant à mes professeurs ce qu'ils en pensaient n'a pas donné de réponses non plus. En 1979, j'ai fait une présentation à Ottawa et on avait un écran Tektronik qui pouvait faire le graphique moyennant un programme en Fortran. Ça été le début de la fin avec l'école où je n'allais plus depuis quelques temps. J'avais réussi à m'inscrire au CÉGEP (équivalent des terminales) mais mes notes frisaient le ridicule et pourtant je continuais à essayer de comprendre les mathématiques et faire des expériences de calcul. Il y avait un centre de calcul à ce CÉGEP avec un programme BASIC merveilleux qui permettait de faire des calculs à 60 décimales, quel bonheur! Finalement, je me tenais à ce centre toute la journée, n'allait peu ou pas du tout aux cours, et le reste du temps à la bibliothèque à potasser les encyclopédies. Pour moi c'était ça le bonheur. Par contre au niveau académique, une catastrophe. Au bout de quelques temps, je me suis inscris à l'UQAM (université du Québec à Montréal). L'entretien avec le directeur du département a été assez étrange. En fait, si quelqu'un se pointait en voulant s'inscrire en mathématiques, il regardait la personne et disait oui ou non selon la tête. Il devait se dire : si quelqu'un est assez

fou pour aller s'inscrire en mathématiques alors la personne devait être très motivée. Dans mon cas il a dit oui et la même histoire s'est reproduite. J'ai découvert l'ordinateur central (bien plus puissant), la bibliothèque encore plus grosse et la même routine. Des calculs, les encyclopédies et la collection de livres de théorie des nombres. Ma vision des mathématiques était encore assez naïve, je voulais comprendre tout ça, me sentant bien sûr bien moins futé que mes camarades d'études. Pour preuve, je me rappelle de ce fameux examen du cours de logique ou tout le monde avait eu une assez bonne note sauf moi qui a réussi à faire un score de 10 % (2 sur 20). Personne ne comprenait pourquoi je m'étais planté à ce point. En fait la logique m'est hermétique. Je n'arrivais pas à comprendre les opérations de base qui sautaient aux yeux à tous sauf à moi. Je pense que je dois être un intuitif dont l'esprit est plutôt enfoncé, le contraire d'un esprit analytique. Si je ne le sens pas, c'est comme impossible, si je ne vois pas les chiffres qu'il y a à l'arrière, le procédé de calcul numérique alors ça ne rentre juste pas dans ma tête. Cette façon de comprendre à contre-courant complètement est restée et c'est même accentué avec les années.

En gros, ma carrière académique a été une série d'échecs lamentables, mon bulletin à l'UQAM était probablement le plus mauvais de tout le campus. Au Québec les notes à l'université sont A, B, C, D et E pour échec. Mais moi qui suis un original j'avais pas mal d'autres lettres comme W, X, T et même un Z, tellement

que je disais que mon bulletin ressemblait à un jeu de Scrabble.
On me connaissait bien parmi les mathématiciens à cause de ce record de mémorisation de π en 1975 et mon intérêt pour les maths en général, mais je crois bien que j'étais considéré comme un bizarre, un raté des maths, un loser de première, on me le disait en plus. Je suis resté dans ces limbes de nombreuses années, à l'écart des succès académiques. J'en voyais des bien plus jeunes que moi se rendre au doctorat rien que sur une patte et en peu de temps. Finalement en 1985 je décroche un emploi d'été à Via Rail comme commis, on me payait assez bien pour remplir des enveloppes, j'y suis resté 4 ans et fini par devenir un analyste en informatique, c'était surtout pour mener une vie normale et bien sûr payer le beurre sur les toasts (du beurre sur les épinards). Ce qui me permit d'acheter mon Sinclair ZX-81, une bébelle ou bidule jouet, un ordinateur jouet ou presque mais pour moi une merveille électronique et enfin de faire encore plus de calculs. En 1987, ça été le Macintosh plus, et en 1989 pour la peau des fesses j'ai acheté un disque dur de 60 mégas, l'équivalent de 1000 euros. C'est là que j'ai pu commencer mes premières tables de nombres. Déjà je piratais le gros ordinateur à Via Rail en y mettant mes tables et les imprimait sur du papier pyjama. Mon patron m'a demandé une fois, c'est quoi tous ces chiffres ? Je lui ai dit que c'était des calculs sur les retards des trains (il y avait beaucoup de retards de trains). J'ai gardé une d'une partie de cette table imprimée de nombres à 41 décimales.

Avec ces cercles et ce que ça représentait, c'est-à-dire des nombres rationnels, on s'en doute ça n'intéressait pas du tout les matheux que je connaissais. Évidemment qui parmi les matheux diraient que les rationnels bêtes et simples puissent représenter quelque chose d'intéressant ? Moi j'en restais à ces dessins étranges sans comprendre pourquoi on y voyait des pointes et des pics et personne que je connaissais était en mesure de me dire pourquoi c'était comme ça. C'est à peu près comme ça que j'ai compris qu'en mathématiques il y a des églises. Mes camarades de cours en parlaient souvent. Comme quoi il y a des dogmes, des croyances. Une partie de ces groupes par exemple sont ceux qui s'en tiennent à la logique pure, les mathématiques formelles ou très strictes. Que tout ce qui est intéressant et valable n'est qu'une série de preuves qui expliquent 'tout'. Le groupe de Nicolas Bourbaki est le meilleur exemple, c'est un collectif de personnes. Nicolas Bourbaki est un personnage fictif, c'est un groupe de mathématiciens fondé en 1952 et qui a pris ce nom pour publier ce qu'ils ont appelé les Éléments de Mathématique. Une série d'ouvrages très formels L'ensemble vide par exemple est désigné par ∅ est

$$\tau \neg\neg\neg \in \tau \neg\neg \in \square \square \square$$

Je vous fais grâce de l'explication, de façon imagée c'est comme une boite contenant le fameux ensemble qui lui-même enfermé dans une boîte contenant au final rien du tout. Ce n'est pas la première fois qu'une formule

semblable est publiée, déjà en 1910-13, le fameux philosophe et mathématicien Bertrand Russell et Alfred Whitehead publient un pavé de 2000 pages : les Principia Mathematica dans lequel à la page 86 du tome 2 on trouve la preuve que 1 + 1 = 2, la voici.

$$*54{\cdot}43. \quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$$

Dem.

$$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$

$$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$$

$$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$$

$$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$

$$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Qui est accompagnée du commentaire laconique: *The above proposition is occasionally useful* mais c'était une blague qu'il admit sur un ton très british, il dit même plus loin qu'elle est utilisée 3 fois dans l'ouvrage. C'était un choc ces formules, je n'y comprenais que dalle et surtout je ne voyais pas l'intérêt d'avoir un résultat pareil, ça me semblait comme on dit capillotracté. Dit autrement, c'est cette histoire de 2 mathématiciens qui voyagent en ballon et se retrouvent suspendu dans les airs complètement perdus et qui voient un paysan (aussi mathématicien) et lui demandent : où sommes-nous ? et qui répond vous êtes à 100 mètres dans les airs. C'est vrai mais inutile.

Donc a fortiori, voyant que ce genre de mathématiques m'était hermétique je m'enfonçais toujours un peu plus dans le monde numérique. Pour la plupart des mathématiciens, s'intéresser aux chiffres,

aux fractions vulgaires comme ¼ est le bas de l'échelle de l'édifice mathématique, de la hiérarchie. Au sommet on retrouve la théorie des Catégories. Pour le commun des mortels ça ressemble tout à fait aux gros bouquins de Russell et Whitehead. Les signes ont changé, les formules ne sont plus les mêmes mais en termes d'abstraction ils sont allés encore plus loin.

C'est là que les genres diffèrent. Je sais à peu près ce que je suis, un intuitif assez enfoncé et qui (selon mes parents) était autiste jusqu'à l'âge de 2 ans. C'est bien plus tard qu'une amie me dit, tu sais Simon tu es un Asperger ? Asperger ? c'est quoi ça ? Je vais donc sur Wikipedia pour y lire que c'est une des formes d'autisme. En voyant les symptômes je vois bien que ça me correspond. Cette manie de compter, je compte tout ce qui est à portée de vue, les marches, les tuiles. Si j'entre dans une pièce avec un carrelage je vais essayer de compter combien il y en a et si les carreaux sont de taille standard, estimer la surface. La même chose avec le plafond. Les plaques d'auto, je ne vois que les chiffres au centre, j'ai calculé par exemple que la probabilité d'avoir une plaque auto qui soit palindrome est à peu près 1 chance sur 5000. Une plaque palindrome c'est la même chose lue à l'envers et à l'endroit comme la phrase 'élu par cette crapule' de Georges Perec. Combien y a-t-il de 'tout', tout ce qui bouge. Je suis comme les parieurs compulsifs qui ne peuvent pas s'empêcher de parier sur n'importe quoi y compris de jouer à une sorte de poker avec le numéro de série des billets de banque. Dans mon cas, je ne joue jamais à ça. Quand j'ai bossé à

Loto-Québec, je faisais les payes en COBOL. J'étais le seul de tout le plancher qui n'achetait pas de billet dans le groupe, ils achetaient ça en lots. J'ai tenté de leur expliquer en prenant des exemples imagés ou concrets, peine perdue. Quand c'est l'anniversaire de quelqu'un je m'amuse souvent à leur dire combien de secondes à peu près ça fait ou bien quel jour de la semaine ils sont nés. Souvent je leur explique mais là aussi souvent c'est comme d'expliquer l'arithmétique à une chaise. Ça n'a jamais suscité le moindre intérêt. Il m'arrive d'avoir des discussions avec tout un chacun sur différents sujets et quelques fois c'est arrivé où la personne donne un chiffre à propos de combien y a-t-il de litres dans une piscine ou quelle est la somme des dettes de la France. Je leur dis, si ce sont des chiffres, n'essayez même pas d'avoir le dernier mot, c'est impossible. S'il s'agit de chiffres je suis incollable. J'ai fait un calcul une fois à propos de la dette de la France (dette extérieure). Ça donne 7500 milliards de dollars US. Mais si on convertit cette somme en Euros qu'on empilerait ça donnerait le volume de 3 fois la pyramide de Khéops à peu près. J'ai envoyé ce calcul à des économistes, des journalistes du journal *Le Monde*. Je n'ai jamais eu de réaction. J'ai la nette impression d'être un extraterrestre pour bien des gens, tellement bizarre.

En fait c'est une question d'efficacité. La plupart des scientifiques admettent volontiers que l'ensemble des mathématiques est utile évidemment, que c'est le langage de l'univers. On peut faire un parallèle avec un problème connu et simple à comprendre, les nombres premiers. Un stratagème a été inventé par Érathosthène

il y a 2000 ans qui permet de les énumérer. On prend une grille carrée ou rectangulaire assez grande, on la remplit avec les entiers 1, 2, 3, … et on raye les multiples de 2 d'abord et les multiples de 3. Ceux qui ne sont pas rayés et qui restent en continuant de cette façon sont les nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …
La suite est infinie, ça été prouvé par Euclide qu'on pense aussi être un collectif de vraies personnes tout comme Pythagore. La preuve est assez facile mais on la prendra comme acquise. Depuis la découverte des nombres premiers, des générations de matheux s'y sont cassés les dents. C'est un problème considéré comme difficile à cerner. On ne sait toujours pas comment les générer de façon simple ou dit autrement : il n'y a pas de formule directe connue. Les nombres premiers sont pour les humains un vrai mystère.

Avec le progrès des mathématiques et des ordinateurs depuis 2000 ans, on s'en doute, on a trouvé quelques solutions mais attention ici on voit comment le mot solution peut sonner selon la personne qui parle.

Il existe une formule qui les donne tous, oui elle existe elle est due à un certain Jones et al. (collègues) en 1976. Elle a 26 variables, de a à z. Mais il y a un problème, si on la programme dans un ordinateur ça bloque après 2 termes. Ça prend des heures sur un ordinateur rapide pour générer quelques nombres premiers. Elle est impraticable. Elle est valide, vraie, logique oui mais inutile. D'autres mathématiciens même parmi les meilleurs en ont sorti d'autres mais qui encore

sont impraticables. Il y a toute une panoplie de ces formules, l'une des plus simples trouvée par le grand Euler est $n^2 + n + 41$ qui lorsque n démarre à 0 jusqu'à 39 en donne 40 et ça s'arrête après. En 2010 on a réussi enfin après des mois de calculs à en trouver une qui en donne 56 qui est de degré 6 et qui comme celle d'Euler s'arrête au 57ième terme. Toutes celles qui ont été trouvées sont soit impraticables, s'arrêtent au bout d'environ 50 valeurs et c'est la fin de l'histoire. À l'heure actuelle, aussi incroyable que cela puisse paraître, la meilleure façon de générer des nombres premiers est toujours basée sur l'idée originale d'Érathosthène (mais à haute vitesse et raffinements). Le programme qui permet cet exploit est ridiculement petit et arrive à générer les premiers à partir de 2 jusqu'à 10 (suivi de 20 zéros). Il fait ça tellement vite qu'il arrive à remplir de chiffres un gros disque dur en quelques heures. Par exemple, de 2 à 3 200 00 000 en 1 minute, jusqu'à 10 milliards en 2 min. 53 secondes. On peut aller encore plus vite si on prend l'ensemble des processeurs d'un seul pc et en utilisant des disques électroniques rapides.

Au final c'est un constat d'échec, presque. Le mystère reste entier. Je m'étais posé la question en 1989 à ce sujet. Est-ce qu'on peut trouver une formule qui donne tous les nombres premiers, quelques-uns ? Peut-on aller plus loin que l'astuce d'Euler ? J'ai trouvé quelques réponses, j'en ai une qui en donne 899, d'autres qui peuvent en donner aussi loin qu'on (peut) ou qu'on veut, à tout le moins quelques centaines. Un polynôme qui en donne 104… mais il est de degré 1001.

Je crois que le problème peut être résolu mais pour ça il faut changer l'angle de vue, c'est ce que j'ai fait en 2019-2020 et ça a produit quelques formules.

Il y a d'autres incongruités dans le domaine des nombres premiers, en voici 2.

La conjecture de Goldbach : Tout nombre pair plus grand que 3 est la somme de deux nombres premiers.

4 =	2 + 2		(1 solution)
6 =	3 + 3		(1 solution)
8 =	3 + 5		(1 solution)
10 =	3 + 7	= 5 + 5	(2 solutions)
12 =	5 + 7		(1 solution)
14 =	3 + 11	= 7 + 7	(2 solutions)

50 = 19 + 31 = 13 + 37 = 7 + 43 = 3 + 47 (4 solutions)

On a vérifié par calcul que c'est vrai jusqu'à n = 4×10^{18}. On peut calculer combien pour chaque n pair le nombre de façons de le faire. On y arrive assez facilement en mettant au carré l'expression :

$$(1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^7 \dots x^p)^2$$

Ce qui donne

$$1 + x^4 + 2x^5 + x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 2x^{12} + 2x^{13} + 3x^{14} + 2x^{15} + 4x^{16} + 4x^{18} + 2x^{19} + 4x^{20} + 2x^{21} + 5x^{22} \dots$$

En ne gardant que les exposants pairs on a le nombre de solutions.
Mais voilà, le problème, de façon évidente la quantité de solutions quand n est grand est assez grande également. Quand n = 10000 on a 462 solutions. Voici le graphe du nombre de solutions selon n.

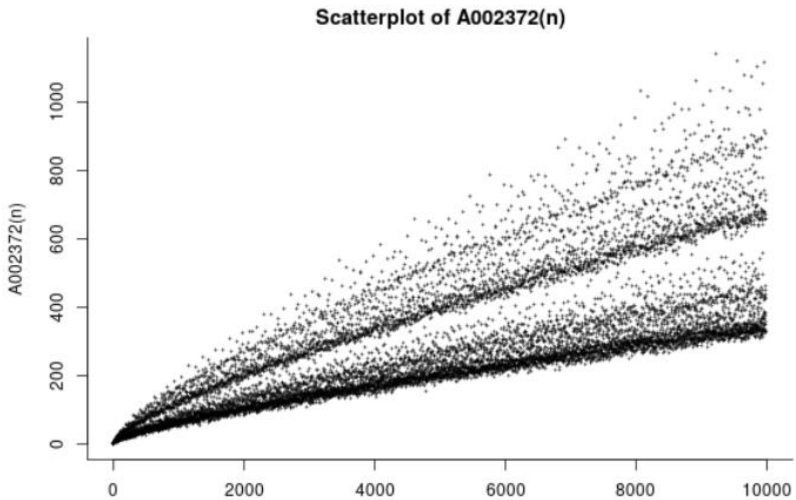


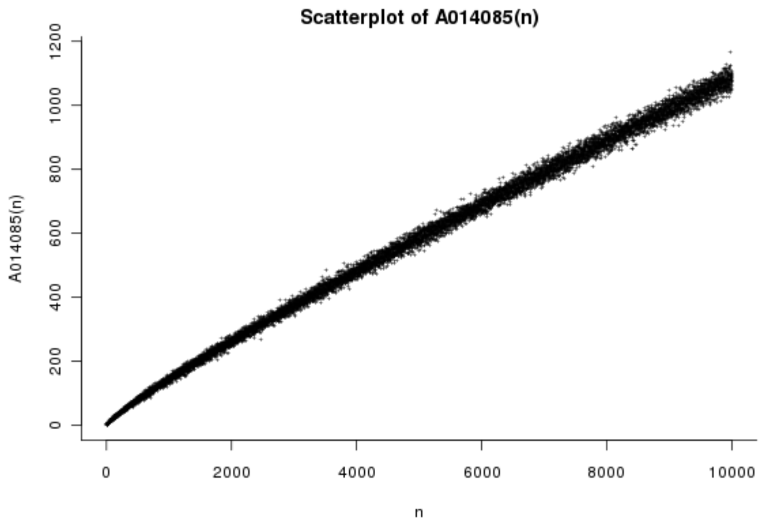
Image tirée du site OEIS

Il est donc assez évident que ça devrait être vrai tout le temps puisque le nombre de façons est très largement plus grand que 1. Et là arrive le schisme entre mathématiciens, certains diront : ouais bon, c'est vérifié si n est très grand et le graphe montre que c'est très largement supérieur à 1. L'autre camp dira : Mais non, on ne l'a pas prouvé hors de tout doute. Ils ont raison mais l'évidence dit le contraire.

La conjecture de Legendre est encore pire. Elle dit : Il y a toujours au moins 1 nombre premier entre 2 carrés successifs ou en plus court, entre

$$n^2 \; et \; (n+1)^2$$

Pour tout entier plus grand que 1.
Si on fait le graphe du nombre de nombres premiers dans chaque intervalle (entre 2 carrés parfaits) on obtient ceci : C'est la suite A014085 du catalogue OEIS.



La situation est encore plus visible. Il est assez clair qu'il y aura de plus en plus de solutions (nombre de nombres premiers entre 2 carrés parfaits). À l'heure actuelle ce n'est toujours pas démontré mais les résultats du calcul direct montrent que la marge d'erreur ou la possibilité d'avoir 0 nombres premiers entre 2 carrés parfaits est assez basse. Là encore les avis divergent sur cette réalité démontrée ou non. Par exemple, si n = 100 millions on compte exactement 5429044 nombres premiers entre les 2 valeurs. Encore pire, si n = 1 milliard de milliards

(10^{18}) on peut estimer précisément qu'il y aura 24127471216847240 nombres premiers entre 10^{18} au carré et $10^{18} + 1$ au carré. Alors la question est à quel moment ça devient évident ou certain ? L'argument mathématique dirait que oui mais il pourrait y en avoir aucun entre ces 2 nombres et l'argument raisonnable ou pratique dit que : la quantité de premiers est pharamineuse si n est grand et que la probabilité qu'il n'y en ait zéro est tout de même infime.

En revanche, il existe bel et bien des conjectures où la situation n'est pas aussi claire comme avec le nombre de Lychrel, il est appelé aussi l'algorithme 196.
Algorithme 196 :
On prend n'importe quel entier et on additionne le nombre renversé ce celui-ci.

13 : on procède donc avec 13 + 31 = 44, le nombre obtenu est palindrome on arrête.

Il semble qu'à partir de n'importe quel nombre on finit toujours par avoir un entier palindrome, tous sauf 196. On a programmé un ordinateur pour voir si ça s'arrêtait, le procédé a été testé jusqu'à obtenir un entier de 1 milliard de chiffres et aucun palindrome n'a été trouvé. L'entier 196 est le plus petit de cette suite d'entiers rébarbatifs. Ici encore, aucune preuve n'a pu être établie et dans ce cas on est certain de rien. Beaucoup des conjectures en théorie des nombres sont dans cette zone grise, d'où la prudence bien compréhensible de la communauté mathématique.

On a donc une probabilité infime, astronomiquement faible et la certitude mathématique d'une formule ou d'un théorème. Dans son livre *A Hitchhiker Guide to the Galaxy* ou HGG pour les fans, Douglas Adams décrit un vaisseau spatial doté d'un moteur incroyable : le *Improbable Infinity Drive*.

Découvert par un heureux hasard, il a été développé par le centre de recherche du gouvernement galactique sur Damogran pour en faire une forme de propulsion gouvernable. Dès que la propulsion atteint l'Improbabilité infinie, elle passe simultanément par tous les points imaginables de tous les univers imaginables. Grâce à ces effets, un nombre incroyable de choses hautement improbables peuvent se produire.

On pourrait l'appeler le générateur d'absurdités quantiques. Dans ce monde du HGG ces nombres premiers probables deviendraient les cas malchanceux du test avec le petit théorème de Fermat.

Pour donner une idée de cette probabilité infime on peut prendre un nombre de 64 chiffres décimaux. On commence par en choisir un seul qui passe le test de Fermat.

Si le nombre passe le test de Fermat alors la probabilité qu'il soit un faux-positif ou un faux premier est de l'ordre de $1/10^{45}$, en termes physique c'est assez exactement comme si on choisissait 1 molécule d'eau prise sur la terre quelques part et qu'on tombe sur cette

molécule particulière. Le nombre 10^{45} est environ la quantité de molécules d'eau sur la terre. Soit dit en passant les banques utilisent couramment des nombres premiers probables d'une taille de 350 chiffres.

Si on regarde l'histoire à propos de ces raisonnements plausibles ou possibles en remontant à Aristote et plus tard Guillaume d'Ockham. Au moment où ces philosophes y ont pensé on était loin d'imaginer qu'on puisse un jour calculer des nombres aussi grands et de faire des raisonnements à propos d'une molécule d'eau sur la terre. À l'époque d'Émile Borel, il avait imaginé ce que pouvaient représenter une probabilité faible pour nous pauvres humains sur la terre. Voici sa liste
0,000001 : C'est impossible à l'échelle humaine.
0,000000000000001 : Impossible à l'échelle terrestre ou 10^{-12}.
0,000 … (49 zéros)… 1 : Impossible à l'échelle cosmique, c'est 10^{-50}.

Voici une échelle (revisitée) des choses improbables.

10^{-64} : 1 molécule d'eau dans tous les océans.
10^{-113} : 1 seul atome dans l'univers connu.

Si on fait le calcul pour un nombre de 1000 chiffres, s'il passe le test de Fermat alors la probabilité est de l'ordre de 0,000 (714 zéros)…1. La petite liste d'Émile Borel a été faite dans les années 30.

On était loin aussi d'imaginer qu'un jour quelqu'un puisse se procurer une machine à la maison capable d'effectuer 1000 milliards de calculs par seconde.

En fait aujourd'hui beaucoup des calculs qui sont faits et qui décrivent la réalité comme la prévision des marées qu'on peut maintenant prévoir pour plusieurs années sur à peu près tous les points du globe près de la mer. Mais pas que ça, l'orbite des planètes : plusieurs centaines d'années. On sait par exemple que la lune en 2030 à cause de sa position causera de fortes marées et inondations. Pour ce qui est du système solaire les modèles peuvent prévoir plusieurs milliers d'années, tellement que certains prévoient un jeu de billard cosmique éventuellement : les planètes vont joyeusement se rentrer dedans mais on a le temps d'y voir puisque ça ne se produira pas avant des milliards d'années. En fait le calcul mathématique permet de transcender la réalité sur certains points bien au-delà de ce qu'un humain peut faire ou prévoir.

Appendice

Voici le post que j’ai mis sur le groupe sci-math en juin 2003. (traduit de l’anglais original).

L'histoire a commencé il y a de nombreuses années, en 1974, lorsque j'ai voulu trouver une formule pour la nième décimale de π. J'étudiais les nombres rationnels et irrationnels. Avec ma calculatrice, je calculais les inverses des nombres premiers et je pouvais facilement trouver un moyen de calculer ces inverses en base 10 à plusieurs chiffres en utilisant des congruences et une exponentiation rapide. Comme il semblait impossible de faire la même chose pour π, j'ai voulu trouver une formule simple $f(n)$ permettant de calculer le nième chiffre de π. J'ai eu cette idée pendant 20 ans.

Comme le calcul de π semble plus compliqué que le nombre E, c'est-à-dire exp(1), j'ai étudié un moyen de calculer ce nombre à la place. À l'époque (vers 1983), j'avais un programme Basic simple qui utilisait un algorithme compte-gouttes pour calculer le nombre e. Comme prévu, cet algorithme fonctionnait, mais il prenait de plus en plus de mémoire. Ma question était : pourquoi ne pouvons-nous pas le faire pour e ou π ou tout autre nombre irrationnel comme $\sqrt{2}$?

C'est au cours de l'année 1994 que j'ai commencé à calculer des séries d'arctan mais je n'ai pas réalisé que cela signifiait beaucoup. J'ai pu utiliser un algorithme pour calculer l'arctan de 1/5 avec une exponentiation

rapide sans réaliser qu'il pouvait calculer arctan(1/5) en base 5 très rapidement puisque l'exponentiation rapide était naturelle dans cette base.

Plus tard, en 1995, vers le 7 août, j'ai soudain réalisé que log(2) pouvait être calculé rapidement en base 2. Comme j'avais un peu d'expérience avec les algorithmes compte-gouttes et aussi mon petit programme Basic pour calculer arctan, il n'a pas été difficile d'adapter l'algorithme à log(2). Dans les jours qui ont suivi, j'ai réalisé mon premier programme : Un programme pour calculer log(9/10) en base 10 en utilisant une très petite quantité de mémoire et très rapidement. Le programme n'avait que 432 caractères de long.

Cette découverte a été un choc pour moi. Je me suis rendu compte que je l'avais trouvé oui mais ce n'était pas nouveau pour moi puisque je pouvais faire arctan(1/5) facilement aussi mais il m'a fallu 2 ans pour m'en rendre compte.

C'est là que j'ai commencé à utiliser Pari-Gp, ce programme pouvait trouver une relation entière entre des nombres réels (jusqu'à une certaine précision), très rapidement.

Pendant mon séjour à l'université de Bordeaux en 1992-1993, j'ai perfectionné le programme que j'avais qui pouvait interfacer Pari-Gp et Maple. Ce petit script Unix avait un énorme avantage de flexibilité car je pouvais mettre en place une série de nombres réels à tester parmi 1 inconnue. A cette époque, je commençais

à trouver de nouveaux résultats, les programmes étaient capables de trouver des identités.

C'est ce programme qui a trouvé la formule de π en hexadécimal (ou en binaire). J'ai également utilisé un autre programme : PSLQ. C'était un bon programme mais un peu lourd à utiliser car il est écrit en Fortran. Néanmoins, j'ai aussi créé une interface avec Maple. Pari-Gp était de loin plus facile à utiliser et plus rapide pour les petits cas, jusqu'à 10 nombres réels à l'époque avec une précision de 100 chiffres était suffisante pour ce genre de problèmes.

C'est là que j'ai fait la plus grosse erreur de ma vie : Accepter la collaboration de Peter Borwein et David H. Bailey comme cofondateurs de cet algorithme et de cette formule alors qu'ils n'avaient rien trouvé du tout. David Bailey n'était même pas près de moi lorsque j'ai trouvé la formule. Il a été ajouté au groupe deux mois après la découverte.

Je pensais naïvement pouvoir négocier un poste de professeur à l'université Simon Fraser, mais j'ai échoué. Je suis très mauvais en négociations. Je me souviens du jour où l'article du Globe & Mail a été publié en octobre 1995. J'étais chez Jon Borwein et il avait un exemplaire du journal en main en main. Ça tombait plutôt bien puisque le même jour il y avait une audition pour les subventions de recherche à l’université SFU et les membres du groupe avaient tous un exemplaire de l’article du journal, ça aide beaucoup ça pour avoir des sous.

C'est là que je lui ai demandé de devenir professeur à la SFU. Il m'a tout de suite répondu : "N'y pense même pas". Je me suis dit que c'était la meilleure chance que j'aie jamais eue de devenir professeur à la SFU, car c'est une université de premier plan de devenir professeur là-bas, mais comme cela a échoué, j'ai décidé que je devais quitter cet endroit.
J'étais très frustré à l'époque, à la fin de 1995, après la découverte. Je me suis rendu compte que de nombreux petits détails étaient terriblement erronés. On leur attribuait beaucoup de mérite pour la découverte et j'avais l'impression de ne rien recevoir en retour. Ma stratégie a échoué. L'un de ces détails était l'article du Globe and Mail, j'ai demandé à Peter Borwein : pourquoi ont-ils mis la photo de vous et de votre frère sur l'article ? Votre frère n'a rien à voir avec cette affaire ! Il m'a simplement répondu que les relations publiques de l'université avaient fait une erreur. Plus tard dans l'année, j'ai été invité à une cérémonie à Vancouver pour le CUFA (prix de la faculté de l'année).

Il s'agit d'un prix avec plaque et mention que ces deux frères ont reçu pour la découverte de la formule. Ils ont simplement mentionné mon nom lors de la cérémonie et je n'ai rien reçu du tout.
Ils ont porté un toast à la reine d'Angleterre, je ne me suis pas levé. Au Québec, se lever et porter un toast à la reine d’Angleterre n’est pas une insulte mais presque. Il y avait avant une fête nationale le 24 mai pour la reine Victoria mais ça été changé pour la Journée des Patriotes en 1982. La fête nationale au Québec c’est le 24 juin et

celle du Canada c'est le 1er juillet mais au Québec le 1er juillet on fait tout sauf de fêter pour la plupart.

Fin 1995, lors du congrès de la Société canadienne des mathématiques à Vancouver, je n'ai pas été invité à parler de cette découverte. Il y a même un type (Stan Wagon) qui m'a dit : "Je ne sais pas si tu as quelque chose à voir avec ça, mais dans tous les cas, c'est bon pour toi, n'est-ce pas ?
En 1996, j'ai réalisé que si je me levais la nuit pour les haïr, c'était un très mauvais signe, cela signifiait que je devais quitter cet endroit. J'étais convaincu que je n'avais pas d'avenir avec ces deux types dans les parages. J'envisageais sérieusement de partir.
L'histoire de la formule (ma formule) n'est pas la seule. La même chose s'est produite avec l'ISC (Inverse Symbolic Calculator). L'histoire est encore plus ridicule. J'ai ouvert le site avec mes constantes en juillet 1995 et le succès a été immédiat. Les 2 Borweins n'avaient rien à voir avec ce truc, j'avais fait les tables et tous les programmes Unix pour le faire tourner. L'aide précieuse que j'ai reçue a été celle d'Adam Van Tuyl, un étudiant diplômé, qui a réalisé la plus grande partie du code des pages web, puis Paul Irvine a rajouté du code.

À l'époque, l'administrateur local du laboratoire a essayé de me convaincre de rester et même de me payer pour la maintenance du ISC, mais j'ai refusé. Je voulais partir avec ce que j'avais : mes tables de nombres réels et de suites que j'avais travaillées pendant des années (depuis 1986). C'est pourquoi j'ai ouvert l'Inverseur de

Plouffe à mon nom en 1998, pour garder ce qui m'appartenait. Quand j'ai réalisé que j'allais perdre la paternité de l'ISC, je suis parti en mars 1997. Je trouvais que Inverseur de Pouffe ou Pouffe’s Inverter en anglais c’est PI ça tombait bien. Je suis allé à Champaign Illinois pour travailler pour Wolfram et Mathematica. Cette fois-ci, cela m'a pris moins de temps, ce dernier était pire que les deux frères réunis. Je suis parti dès que j'ai pu, 5 mois plus tard.

Peter Borwein voulait absolument que je fasse un doctorat sur l'ISC mais il voulait aussi publier (avec son nom bien sûr) un article avant que je ne dépose la thèse. Encore une fois, c'est la même histoire, ces 2 types sont tellement avides que je n'arrive pas à y croire. Le comportement qu'ils ont eu avec moi n'était pas exclusif, en particulier Peter Borwein, il était le même avec la plupart de ses étudiants, en particulier les bons, aspirant le maximum. Jon est le même, mais il a plus de talent en politique et plus d'argent aussi. Il est bon mais a tendance à s'autoréférencer au maximum, c’est une technique connue dans le monde de la publication d’articles. On fait un article et en référence on met le paquet en citant largement ses propres articles. Ça fonctionne bien si plusieurs personnes d’un petit groupe le fait systématiquement en boucle. Ça a pour effet d’augmenter artificiellement la cote pour les publications.

Il pense que s'il a eu l'idée de la somme de deux nombres à un moment donné de sa vie, alors toutes les formules mathématiques sont sa propre découverte. Il a

publié beaucoup d'articles sur plusieurs sujets mais souvent la découverte originale n'est pas de lui.

A propos de David H. Bailey. Il est arrivé après la découverte de la formule et de mon petit programme en Basic, j'avais aussi une version fortran. C'est ici que Peter Borwein a suggéré de l'ajouter comme collaborateur à la découverte comme collaborateur à la découverte puisqu'il y a contribué (comme il l'a dit), c'est ma deuxième grande erreur. Bien sûr, il a accepté de co-écrire l'article, qui ne l'aurait pas fait ? David H. Bailey (et Ferguson) sont les auteurs du programme PSLQ. Ce programme est la version américaine du programme Pari-Gp. Je l'ai un peu utilisé il est vrai, mais ce qui a fait la découverte, c'est le programme Pari-Gp et l'interface Maple que j'avais. Donc en fait, cette personne n'a rien à voir avec la découverte de cet algorithme et très peu avec la découverte de la formule. C'est moi qui ai commis l'erreur. Dire que Bailey a trouvé la formule revient à dire que la formule a été trouvée par le programme Maple et Basic.

J'ai essayé très fort de corriger la situation en évitant le sujet de la découverte réelle de l'algorithme et de la formule, j'ai fait un article en 1996 pour la base 10. Je pensais naïvement que cela rétablirait la situation, mais ce ne fut pas le cas. J'ai même eu un commentaire de Bailey à ce sujet qui disait que mon algorithme était au mieux *moot* qui veut dire discutable, j'étais insulté. J'ai failli accepter de faire un film à un moment donné en 1999 lorsqu'un certain type d'Angleterre qui voulait

faire un film sur π et la découverte de la formule m'a demandé si j'accepterais de parler de mes différents avec les Borweins. Je n'ai pas voulu aller dans cette direction mais j'aurais dû. Il y a eu ce livre de Jean-Paul Delahaye (Le fascinant nombre pi) qui mentionnait l'algorithme et la formule de Plouffe parce que je lui avais raconté une partie de l'histoire. D'une certaine manière, j'avais peur de révéler cette énorme histoire.

Pourquoi étais-je si naïf ? J'avais déjà collaboré avec Neil Sloane, avec l'Encyclopedia of Integer Sequences et le site web, ce qui a été un grand succès et Neil est la personne que je respecte le plus en mathématiques, c'est pourquoi j'ai pensé (à tort) que ma collaboration avec les Borweins devait bien se passer, une grosse erreur.
Pourquoi est-ce que j'écris ceci ? Pour dire la vérité et aussi parce que l'arrogance de ces gens me rend malade. En tirerai-je quelque chose ? Je m'en fiche, je n'ai rien à perdre.

Simon Plouffe
Montréal, le 22 juin 2003.

Revue de presse, photos, articles et sites internet

Page Maison de Simon Plouffe's Home Page

Plouffe's Inverter : 85 million constants on-line
Inverseur de Plouffe : 85 millions de constantes en-ligne

Page Maison vers 2000.

logique et calcul

Obsession de π

JEAN-PAUL DELAHAYE

Grâce à une nouvelle formule pour π, on sait calculer (en base 2) le 400 milliardième chiffre de π sans connaître les autres.

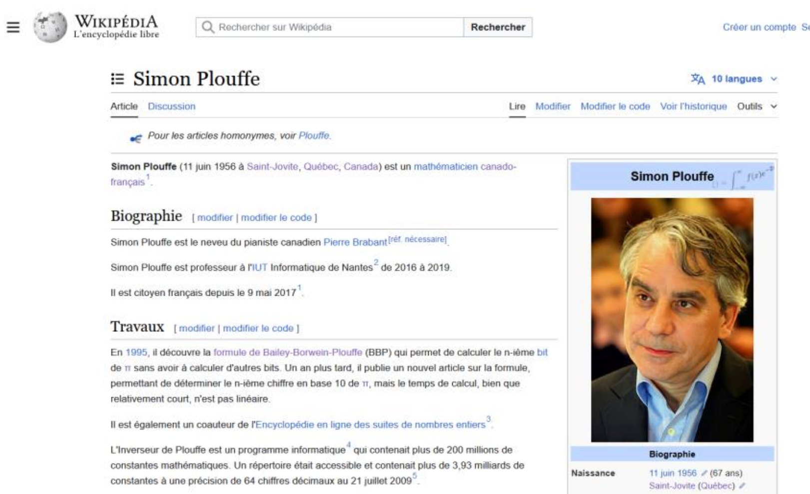
En 1995, nombreux étaient ceux qui pensaient qu'il n'y avait plus grand-chose de spectaculaire à attendre concernant π : sans doute allait-on continuer à progresser dans le calcul des décimales, mais cela se ferait males connues (record atteint, en 1973, par les Français Jean Guilloud et Martine Bouyer) aux six milliards quatre cents millions de décimales en 1995 (record actuel du Japonais Yasumasa Kanada).

c'était impossible. Les mathématiciens sont parfois persuadés, sans véritable preuve, mais en s'appuyant sur leur fameuse et trop commode intuition, de certaines impossibilités qu'un illuminé ou simplement un mathématicien génial sans complexe vient balayer d'un revers de main.

En 1989, les frères Borwein, grands spécialistes des méthodes de calcul de π (voir *Les mathématiciens*, *Pour la Science*, 1996), écrivaient : «Il est raisonnable de spéculer que calculer le *n*-ième chiffre de π n'est pas vraiment plus facile que calculer tous les chiffres jusqu'au *n*-ième.» Il est amusant de remarquer que l'un des frères Borwein appartient à l'équipe qui a démenti ce jugement!

UNE FORMULE NOUVELLE

Pour la Science, janvier 1997



WIKIPÉDIA L'encyclopédie libre

Rechercher sur Wikipédia Rechercher

Créer un compte Se

Simon Plouffe

10 langues

Article Discussion Lire Modifier Modifier le code Voir l'historique Outils

Pour les articles homonymes, voir Plouffe.

Simon Plouffe (11 juin 1956 à Saint-Jovite, Québec, Canada) est un mathématicien canado-français[1].

Biographie [modifier | modifier le code]

Simon Plouffe est le neveu du pianiste canadien Pierre Brabant[réf. nécessaire].

Simon Plouffe est professeur à l'IUT Informatique de Nantes[2] de 2016 à 2019.

Il est citoyen français depuis le 9 mai 2017[1].

Travaux [modifier | modifier le code]

En 1995, il découvre la formule de Bailey-Borwein-Plouffe (BBP) qui permet de calculer le n-ième bit de π sans avoir à calculer d'autres bits. Un an plus tard, il publie un nouvel article sur la formule, permettant de déterminer le n-ième chiffre en base 10 de π, mais le temps de calcul, bien que relativement court, n'est pas linéaire.

Il est également un coauteur de l'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers[3].

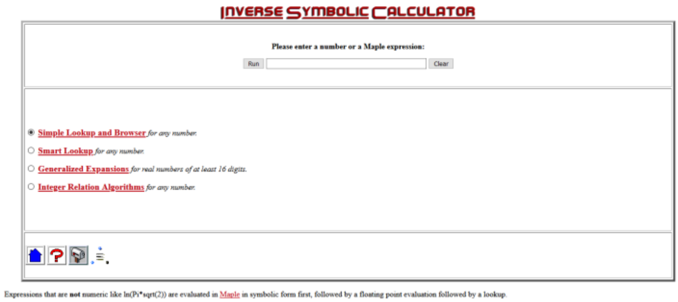
L'Inverseur de Plouffe est un programme informatique[4] qui contenait plus de 200 millions de constantes mathématiques. Un répertoire était accessible et contenait plus de 3,93 milliards de constantes à une précision de 64 chiffres décimaux au 21 juillet 2009[5].

Simon Plouffe

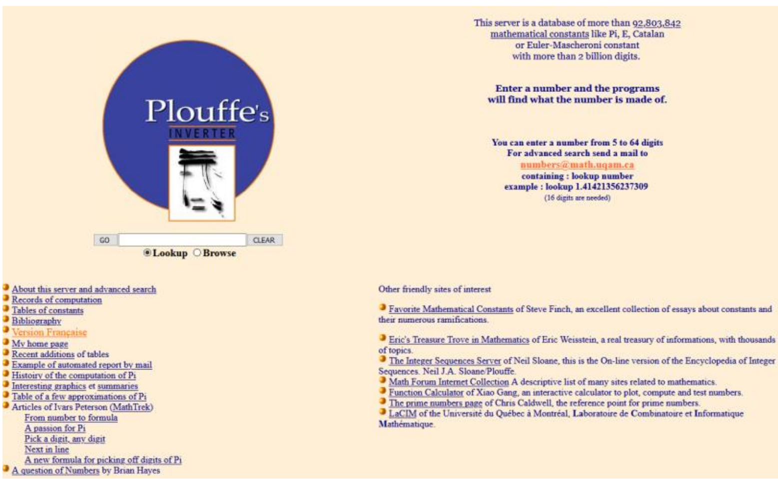
Biographie

Naissance	11 juin 1956 (67 ans) Saint-Jovite (Québec)

Sur Wikipedia



Le ISC en 1995 et toujours en fonction après 29 ans



Inverseur de Plouffe (1998)

Première vraie table sur HyperCard (1988)

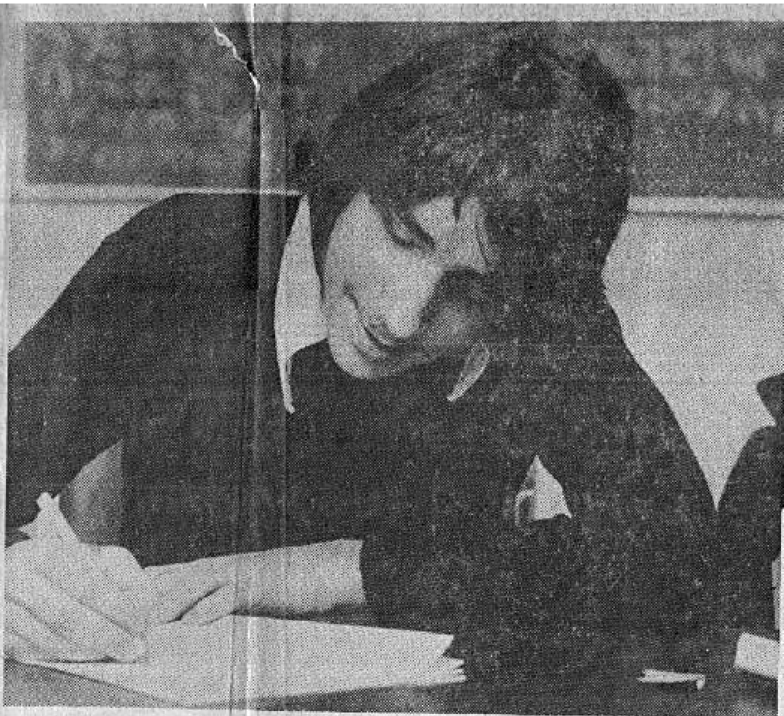


photo J.-Y. Létourneau, LA PRESSE

Simon Plouffe, alignant des chiffres. Juste pour s'amuser. Et a voir son nom dans le livre des records insolites.

Plouffe, recordman: mémoriser l'infini...

par Yves LECLERC

Simon Plouffe, recordman du monde.

Ca ne vous dit rien? Tout-à-fait normal. Le record qu'il détient depuis une semaine n'est pas de ceux qui font la manchette des journaux

LA PRESSE, il en a écrit et récité 4,096 devant témoin, surpassant ainsi le record précédent de 3,025.

Ca sert à quoi? A rien du tout, et c'est justement là la beauté de la chose. Tout ce que Simon

Et ceci jusqu'à ce qu'un autre maniaque dans son genre le surpasse en récitant 5,000 ou 6,000 ou 10,000 décimales. Comme le nombre de celles-ci est infini (un ordinateur en a déjà calculé un mil-

Journal La Presse (Montréal, 11 décembre 1975)

LA PERSONNALITÉ DE LA SEMAINE

ENCORE PLUS QUE DU TALENT, DE L'INTELLIGENCE, MÊME DU GÉNIE, L'EXCELLENCE NAÎT DE L'EFFORT

Simon Plouffe

Fasciné par les nombres depuis son adolescence, ce mathématicien autodidacte a collaboré à la production d'un «dictionnaire» du langage mathématique qui se trouve dans les bibliothèques universitaires du monde entier.

JEAN-PAUL SOULIÉ

L'Université du Québec à Montréal a remis cette semaine son prix Reconnaissance scientifique UQAM 2004 à Simon Plouffe, 48 ans, mathématicien autodidacte et indépendant au parcours atypique. Analyste en informatique et pianiste à ses heures, Simon Plouffe collabore avec l'équipe d'une douzaine de chercheurs du Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique de l'UQAM. En 1975, alors qu'il n'avait que 19 ans, depuis longtemps fasciné par le nombre pi, Simon Plouffe avait établi un record mondial en mémorisant les 4096 premières décimales de pi. Son exploit, publié à la une de *La Presse*, avait été inscrit dans la version française du *Livre des records Guinness*. Vingt ans plus tard, il collaborait avec le mathématicien Neil Sloane à la publication de *l'Encyclopedia of Integer Sequences* et participait à la version Web de cet ouvrage, qui répertorie 5500 suites mathématiques. Connu des scientifiques du monde entier, il a également créé l'«Inverseur de Plouffe», un site Web utilisé par les mathématiciens internautes.

La Presse souligne la remise du prix Reconnaissance scientifique UQAM 2004 à Simon Plouffe et nomme son réci-

ensuite une boutique rue Saint-Paul, dans le Vieux Montréal. C'est à cette époque que les choses se gâtent pour le jeune Simon : «À l'école secondaire, à Verdun, je ne comprenais même pas mon horaire, dit-il en riant. Il n'y avait pas de bibliothèque. Ça a été un blocage total. La moitié du temps, je ne trouvais pas mes classes. Je n'étais pas intéressé.» Un cadeau allait lui faire découvrir sa voie: à 15 ans, un oncle lui offre une calculette. Il est fasciné par les nombres. Ses livre de chevet, ce sont les tables de logarythmes et des bouquins sur les chiffres premiers.

En 1989, Simon trouve le premier livre de J.A. Sloane, un gros recueil de nombres parfaitement hermétique pour les profanes. Sloane est un mathématicien des Laboratoires Bell, où ont été inventés le laser, les transistors, et où ont été faites les principales découvertes informatiques. Simon potasse le livre de Sloane, entreprend de le scanner à la main, fait des programmes et, au bout de six mois découvre une erreur dans l'oeuvre du maître. Il la lui soumet respectueusement, à titre d'amateur. Sloane le rappelle au bureau d'Hydro-Québec où Simon fait des rapports de gestion —

«L'univers tout entier est fait de nombres, on trouve les constances mathématiques

Journal La Presse (Montréal, 25 avril 2004)

L'Homme de la semaine

Simon Plouffe, le "malade" des chiffres

Né dans la ville de Jovinte, au Canada, Simon Plouffe est installé en France depuis 3 ans. Ce passionné des chiffres, inventeur de la formule de Plouffe, vit pour les mathématiques auxquels il a même consacré un site Internet.

« Quand j'étais plus jeune, mon héros c'était Einstein, mais je ne comprenais rien à la physique », explique Simon Plouffe. Sa voix résonne de son accent québecquois, malgré ses 3 années passées en France, entre Tours, où il donne parfois des cours, Nantes, où il vit, et Vierzon où il vient régulièrement rendre visite à des amis.

La révélation, Simon l'a eu a 15 ans. L'adolescent canadien se prend alors de passion pour les équations.
« Je me suis interrogé sur la présence du nombre Pi dans toute chose... Les constantes mathématiques apparaissent dans notre vie de tous les jours. Par exemple, si l'on prend une simple marguerite, parmi les 25 000 variétés qui existent, je vous parie qu'elle a 21 pétales. C'est une raison mathématique, comme les 3 sections de la banane, les 5 trous dans la pomme, les spirales d'un ananas où il y en a 5 d'un côté et 8 de l'autre.... »
Des mathématiques jusque dans les tournesols : 21 spirales d'un côté et 34 de l'autre, ou bien 34 et 55, ou encore 55 et 89... Une logique qui correspond à la suite de Fibonacci *(1)*.

Simon Plouffe, un mathématicien de génie.

© Crédit photo : La République

Simon Plouffe se passionne pour

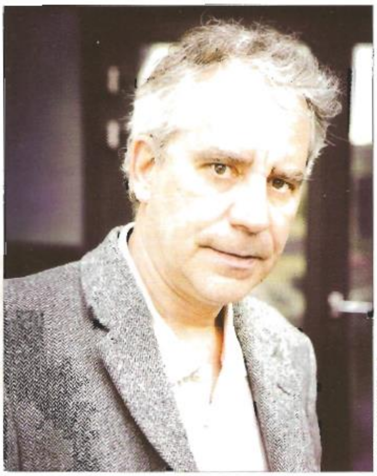
Journal La République (Vierzon, 26 novembre 2010)

« Il y a énormément à découvrir sous les mystérieuses décimales des réels »

Chercheur indépendant en mathématiques, Simon Plouffe fabrique des tables de réels. Grâce à son « inverseur de Plouffe », tout un chacun peut vérifier sur internet l'origine d'un résultat numérique.

De quand date votre intérêt pour les nombres?
Déjà, à l'école, je ne m'intéressais qu'à l'arithmétique et aux additions. Mais le déclic s'est fait lorsque, à l'âge de 15 ans, j'ai récupéré une calculette. Je passais des heures à essayer des opérations. C'était pour moi comme un jeu vidéo. Lorsque j'ai reçu mon premier ordinateur, j'ai eu tout de suite envie de le remplir de nombres. En 1986, j'ai commencé à y entrer à la main toutes les suites de nombres du livre de Neil Sloane *A Handbook of Integer Sequences* (Academic Press, 1973). Cela m'a pris six mois. Je me suis aperçu qu'il y avait des erreurs dans le livre. J'ai écrit à Sloane qui m'a proposé de faire la seconde édition avec lui *(lire pp. 58-60)*.

Qu'est-ce que l'inverseur de Plouffe?
Les livres de maths sont remplis de formules qui vont de gauche à droite : une formule donne un nombre. Autrement dit, vous avez une formule, qui peut être très complexe, c'est le terme



« Je vois les nombres comme un mur dont ne ressort aucune structure »

leurs décimales. Depuis des millénaires qu'on les connaît, peu de progrès ont été réalisés dans cette direction. Prenons l'exemple de la constante de Madelung, qui traduit le potentiel en O d'un cristal de sel infini. Cette constante est un nombre égal à −1,74756459463318219063... mais on ne sait pas à quoi il correspond. On connaît la formule, qui est énorme, mais on ne sait pas la simplifier. Autre mystère : pourquoi ne parvient-on pas à exprimer la somme des inverses des cubes des entiers à l'aide de π alors qu'on y arrive avec la somme des inverses des carrés des entiers (qui vaut $\pi^2/6$)? Quant à π, que l'on retrouve partout, ses décimales sont également un mystère. Je suis parvenu à lever une toute petite partie du voile en découvrant en 1995 une formule qui permet de calculer la énième décimale de π en base 2 sans avoir à calculer les précédentes. Je suis persuadé qu'il y a énormément à découvrir sous les mystérieuses

Sciences et Avenir Octobre 2009

MATHÉMATIQUES

Dingues de chiffres et chiffres dingues

Percer le secret du nombre pi, jongler avec les nombres premiers ou créer des carrés magiques : portraits de trois mathématiciens amateurs passionnés.

Ils connaissent des centaines de chiffres par cœur, collectionnent les coïncidences numériques glanées sur les plaques d'immatriculation, les horloges, les calendriers… Ils gribouillent sans cesse des formules. Ils se lancent des défis, battent des records. Ils tapent sur le clavier de leur superordinateur ou calculent encore au crayon sur une feuille de papier… Fascinés par pi, les nombres premiers ou les carrés magiques, tous ces mathématiciens amateurs passionnés des nombres finissent par rejoindre les préoccupations académiques des chercheurs professionnels.

Grâce à l'universalité du langage mathématique et à la simplicité à énoncer certains problèmes – mais parfois si durs à résoudre qu'ils ne le sont toujours pas ! –, une communauté internationale informelle est en ébullition permanente sur Internet. Portraits de quelques-uns de ces passionnés et de leurs idoles.

Fous de pi

Simon Plouffe est un mordu de chiffres. Tout jeune déjà, son livre de chevet était une table de logarithme. *« Puis j'ai trouvé mon nirvana : le célèbre recueil de formules mathématiques de Milton Abramowitz et ses mille pages »*, se souvient, amusé, ce Canadien devenu ingénieur informaticien. A 19 ans, il devient célèbre grâce au nombre pi. *Le Livre des records* homologue sa récitation par cœur des 4096 premières décimales de ce nombre mythique, 3,14159… (de quoi remplir une page de *Sciences et Avenir*). *« Je n'avais rien à faire, alors… »*, témoigne le recordman, largement dépassé aujourd'hui par Akira Haraguchi : en octobre dernier, ce Japonais a égrené par cœur 100 000 décimales !

Mais le nom de Simon Plouffe ne s'est pas effacé des mémoires pour autant. En 1995, alors qu'il travaille à l'université Simon Fraser (Colombie-Britannique, Canada), il découvre, avec David Bailey et Peter Borwein, une remarquable formule qui calcule les lointaines décimales de pi sans avoir besoin de trouver toutes celles qui précèdent. *« Tout le monde pensait que c'était impossible. Cela a stimulé mon esprit rebelle et on a trouvé »*, raconte Simon Plouffe. Cela fit faire un bond à l'exploration de la longue chaîne infinie des décimales de pi. A l'époque, un peu plus de quatre milliards de chiffres après la virgule étaient connus. Avec la nouvelle formule, on passe au double (mais à condition d'écrire pi en base 16).

Puis très vite, un Français, Fabrice Bellard, aujourd'hui ingénieur informaticien, améliore l'algorithme pour s'enfoncer vingt fois plus loin dans la jungle des décimales. Un Canadien, Colin Percival, reprend alors le flambeau et détient toujours l'actuel record en ayant calculé la 250 billionième décimale (10^{15}). *« J'ai voulu ramener à l'université Simon-Fraser ce qui lui appartenait ! »* témoigne le recordman qui vient de finir sa thèse en informatique. *C'était aussi un moyen de populariser le calcul distribué sur ordinateur, qui fut repris par le projet Seti de recherche de signaux extraterrestres. »*

L'univers de pi est un univers de compétition. Pendant que certains « sautent » sur des décimales lointaines, d'autres s'affrontent sur le terrain du calcul exhaustif. *« Dans ce cas, nous ne pouvons utiliser que des superordinateurs car il faut que le système soit parfaitement équilibré »*, précise Yasumasa Kanada, détenteur de 18 records depuis les années 1980. Grâce à son superordinateur Hitachi, 1241 milliards de décimales de pi sont connues depuis novembre 2002. En 2008, il compte faire encore mieux.

Pourquoi cette course ? D'abord elle motive les informaticiens. *« Programmer ces algorithmes est un vrai défi, c'est loin d'être facile »*, justifie Fabrice Bellard. En outre, la méthode nécessite de manipuler de très grands nombres et d'inventer les bonnes façons de le faire, ce qui peut ensuite servir à d'autres types de calculs. C'est enfin un bon moyen de tester la fiabilité des ordinateurs en les poussant à leurs limites.

Mais l'autre raison est plus mathématique. Il s'agit de percer les secrets de ce mystérieux nombre. Certes, nous savons depuis 1761 que pi ne peut pas s'écrire comme le rapport de deux entiers. On dit qu'il est irrationnel, tout comme la racine carrée de deux. 22/7, proposé par Archimède, ne donne que deux décimales. 355/113 n'en donnent que six. Ne cherchez pas : aucune fraction ne donne pi.

Ensuite pi n'est pas la solution d'une équation algébrique du type $ax^2 + bx + c = 0$ ou de tout autre polynôme. On dit qu'il est transcendant. La démonstration ne fut apportée qu'en 1882 par Ferdinand von Lindemann et règle du même coup la quadrature du cercle : il est impossible de construire à la règle et au compas un carré dont l'aire est égale à celle d'un disque donné. Ce qui n'empêche pas que des amateurs se piquent encore d'y arriver…

En revanche, on ne sait toujours pas si pi est normal ou pas, c'est-à-dire *grosso modo* si la succession de ses décimales est aléatoire ou non. Se peut-il que tout d'un coup la suite devienne régulière ? Ou qu'un peu plus de 8 que de 0 apparaissent ? Nul ne sait, et le nombre pi risque de fasciner encore longtemps. *« Quelqu'un de normal peut devenir un enthousiaste de pi. Mais pas l'inverse ! »*, conclut Simon Plouffe.

Le Canadien Simon Plouffe connaît des milliers de décimales de pi par cœur. Il est aussi l'auteur d'un incroyable outil, l'inverseur de chiffres, qui trouve une formule mathématique à partir d'une séquence de nombres.

Le Fascinant nombre pi, Jean-Paul Delahaye, éditions Pour la science.
A la poursuite de pi, Jörg Arndt et Christoph Haenel, Vuibert.
Le site de Simon Plouffe : www.lacim.uqam.ca/~plouffe
L'univers de pi : pi314.net

70 • SCIENCES ET AVENIR - AOÛT 2007

AOÛT 2007 - SCIENCES ET AVENIR • 71

Sciences et Avenir aout 2007

$$
\begin{gathered}
\textit{Initialisation :}\\
y_0 = \sqrt{2} - 1\\
a_0 = 6 - 4\sqrt{2}\\
\textit{Itération}\,(k = 0,1,2,\ldots)\\
y_{k+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_k^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_k^4}}\\
a_{k+1} = a_k(1 + y_{k+1})^4 - 2^{2k+3}_{y_{k+1}}(1 + y_{k+1} + y_{k+1}^2) \rightarrow \frac{1}{\pi}
\end{gathered}
$$

La variante quartique Borwein.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot \frac{[1103 + 26390n]}{396^{4n}}$$

Figure 10.

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887 – 1920).

machines augmente : en 1973, une seule journée suffit à un CDC pour calculer un million de décimales. Tous ces calculs reposent sur la formule de l'arc tangente.

De nouveaux algorithmes

A partir des années 1980 débute la troisième période du développement de Pi. Plusieurs opérations mathématiques furent largement optimisées et les calculs sur Pi atteignent de nouveaux sommets.

L'opération de multiplication de nombres de grande taille se trouve largement améliorée en 1965. Cette méthode, dite de la multiplication par transformée rapide de Fourrier, modifie les opérandes avant leur "multiplication". La complexité du calcul de cette opération devient pratiquement linéaire et d'une grande rapidité. Lors d'une réunion avec le président des Etats-Unis, deux mathématiciens, Richard W. Garwin et John W. Tukey, discutèrent de ce sujet. Peu de temps après leur entretien, l'algorithme fut publié et la recherche historique commença pour en déterminer les fondements. Plusieurs travaux s'en approchent mais il semble bien que Gauss soit le premier mathématicien à avoir amélioré ce calcul à l'aide de la transformée rapide de Fourrier, dès 1805. Si la multiplication classique que l'on apprend à l'école est dotée d'une complexité de calcul dite quadratique, la multiplication par transformée rapide de Fourrier est de l'ordre N.log2 (N) : sa progression est presque linéaire (nous aborderons plus loin la méthode intermédiaire de la multiplication de Karatsuba).

Les algorithmes spécifiques

Après les optimisations des opérations utilisées dans les calculs, de nouvelles formules totalement vouées à Pi voient le jour. Dès 1976, on abandonne la formule de l'arc tangente au profit des travaux du vénérable mathématicien indien Srinivasa Ramanujan (1887-1920). L'une de ses formules, présentée en figure 10, se révèle au moins cinq fois plus rapide que toutes celles qui circulent lors de sa publication. Une autre amélioration touche l'algorithme de l'AGM de Gauss (étudié plus loin dans ce dossier) : une

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

Figure 11.

méthode dite de l'itération permet de doubler le nombre de décimales obtenues, créant une convergence quadratique vers Pi.

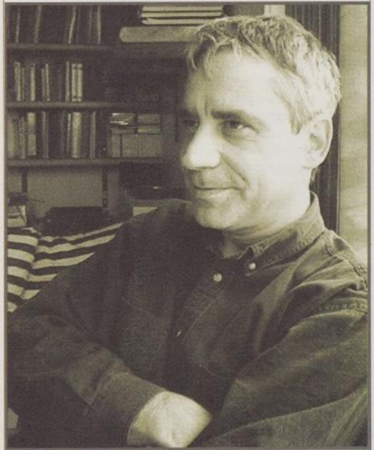
Les frères Borwein

En 1985, les frères Borwein publient une série de formules hautement spécialisées dans le calcul de Pi. Leurs travaux sont incontournables et les amoureux de Pi ne peuvent y échapper. On y trouve des progressions quadratiques et même noniques, mais à l'usage la première forme est la plus rapide.

C'est avec une formule quadratique que Yasumaka Kanada parvient à son record de 200 milliards de décimales, après seulement vingt itérations de l'algorithme ! Entre 1981 et 1999, le record sera battu vingt-six fois.

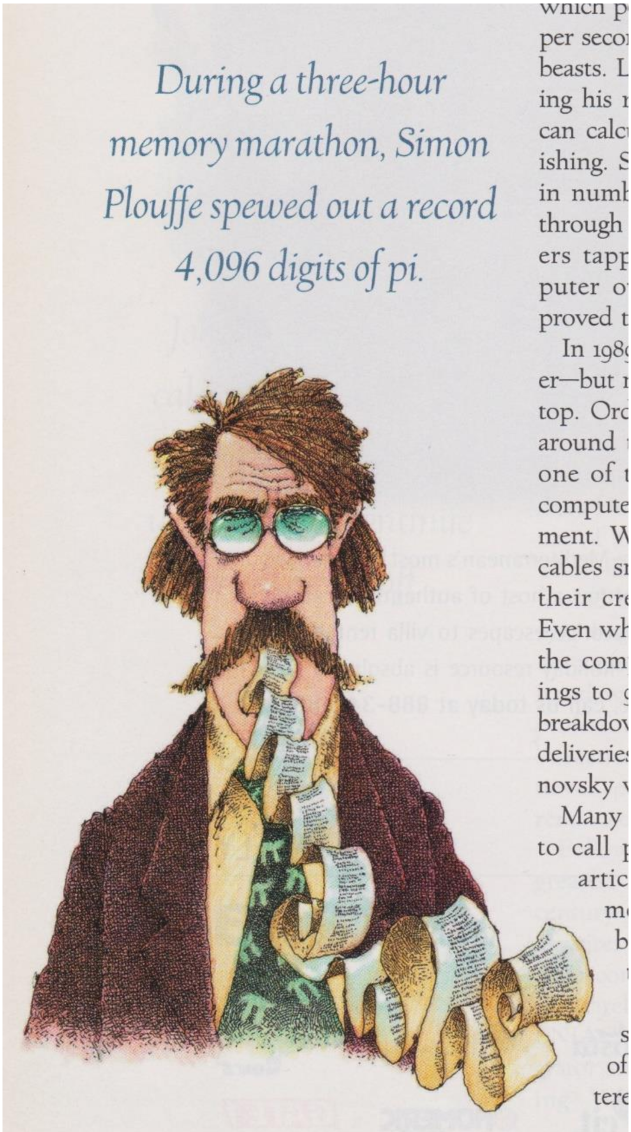
A la poursuite de chiffres isolés dans Pi

L'un des algorithmes les plus impressionnants concernant Pi – et dans une plus large mesure les mathématiques – fut l'introduction de la formule BBP ; ses initiales reprennent les noms de ses auteurs : David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe. Publié en septembre 1995, leur algorithme (figure 11) permet de calculer toute position arbitraire en base 16 dans Pi et, ce, sans avoir besoin de calculer toutes les décimales qui précèdent ! Les chercheurs auront ainsi déterminé que le dix milliardième chiffre de Pi est zéro, soit deux fois plus loin de Pi que le dernier record à l'époque. Aujourd'hui, nous avons des chiffres mille fois plus loin... Nous devons ces records au jeune Simon Fraser de l'université de Burnaby (Canada). En utilisant l'approche du calcul distribué sur deux ans et grâce à près de 2000 machines sur Internet, il a réalisé un calcul équivalent à 700 années de calcul.



Le mathématicien canadien Simon Plouffe, l'un des auteurs de l'algorithme BBP.

LOGIN, Janvier 2003



During a three-hour memory marathon, Simon Plouffe spewed out a record 4,096 digits of pi.

which p
per secon
beasts. L
ing his r
can calcu
ishing. S
in numb
through
ers tapp
puter o
proved t
In 198
er—but r
top. Ord
around
one of t
compute
ment. W
cables sr
their cre
Even wh
the com
ings to g
breakdov
deliveries
novsky v
Many
to call p
artic
m
b
s
of
tere

Smithsonian magazine Mai 2002

L'ESSENTIEL

- Comment déterminer les nombres premiers ? Depuis l'Antiquité, plusieurs formules ont été proposées pour les calculer.
- Certaines sont élégantes, d'autres plus complexes, mais elles ont souvent pour défaut de ne donner que quelques nombres premiers.
- D'autres encore donnent une infinité (théorique) de nombres premiers, mais les valeurs qu'ils prennent croissent trop vite.
- On peut néanmoins s'en inspirer pour faire mieux, notamment en ajustant très finement les paramètres des formules.

L'AUTEUR

SIMON PLOUFFE
professeur à l'IUT Informatique de Nantes, coauteur de l'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers (OEIS).

Un record pour les nombres premiers

Depuis des millénaires, les mathématiciens conçoivent des formules pour calculer des nombres premiers. En janvier 2019, une formule élaborée par l'auteur a généré une séquence de 100 nombres premiers. C'est un record ! Explications.

Le 7 décembre 2018, un record été battu, celui du plus grand nombre premier connu. $2^{82589933} - 1$, qui comporte près de 25 millions de chiffres en écriture décimale. On doit cette performance (la vérification est en cours) au *Gimps*, le *Great Internet Mersenne Prime Search*. Ce projet fondé par George Woltman réunit des volontaires mettant à disposition leur ordinateur pour un calcul, distribué, des nombres premiers dits de Mersenne (*voir l'encadré page 79*), c'est-à-dire de la forme $2^p - 1$, p étant un nombre premier. On disposerait donc d'une formule pour déterminer les nombres premiers ?

UNE FORMULE, MAIS LAQUELLE ?

Ce n'est pas aussi simple, notamment parce que tous les nombres premiers ne sont pas de la forme de Mersenne, tant s'en faut. La question se pose donc toujours : y a-t-il une formule pour les nombres premiers ? La réponse est… oui et non.

Et d'abord qu'entend-on par formule ? Par exemple, ce peut être une formule dite close comme celle trouvée par le Suisse Leonhard Euler en 1772 : $p(n) = n^2 + n + 41$. Pour n entre 0 >

2
3
5
11
37
223
3 331
192 271
84 308 429
774 116 799 347
681 098 209 317 971 743
562 101 323 304 225 290 104 514 179
13 326 678 220 145 859 782 825 116 625 722 145 759 009
1 538 448 162 271 607 869 601 834 587 431 948 506 238 982 765 193 425 993 274 489

Avec un exposant égal à 3/2 et a_0=2,038239154782... on obtient la suite de nombres premiers ci-dessus.

C'est désormais la suite A323611. Un autre exemple livre les petits nombres premiers. Avec a_0=3,34683553593243081... et un exposant égal à 1,251295195638... la suite (A323065) est: 3, 5, 7, 11, 19, 41, 103, 331, 1423, 8819, 86477, 1504949...

En choisissant a_0 assez grand, on peut utiliser un exposant très petit, comme 101/100. Si a_0=10^{500}+961,4993763378507... on obtient une suite de 100 nombres premiers, le dernier n'ayant que 1340 chiffres. Elle bat ainsi les records de 2010 (58 nombres premiers avec un polynôme et 26 avec une progression arithmétique). Notons néanmoins que lorsque leur taille dépasse 20 chiffres, les nombres obtenus que sont que des premiers probables. Si a_0 est bien choisi, on conjecture que l'exposant peut être aussi près de 1 qu'on le souhaite (pour limiter la croissance).

OBTENIR TOUS LES NOMBRES PREMIERS ?

Avec des formules de ce type, peut-on obtenir tous les nombres premiers? Pour y parvenir, on pourrait par exemple partir d'un nombre premier arbitraire et descendre jusqu'à 2. C'est possible avec un procédé inverse en utilisant 1/α, α étant l'exposant. Ainsi, en partant du nombre premier 10^{100}+267 et avec α =0,38562256415290... on obtient 742123524365563, 542489, 163, 7, 2.

On retrouve la suite inverse en partant à 2 avec a_0=2,1322219996628413452... et l'exposant 1/α=2,5932092490404286167308... Le principe fonctionne dans les deux sens!

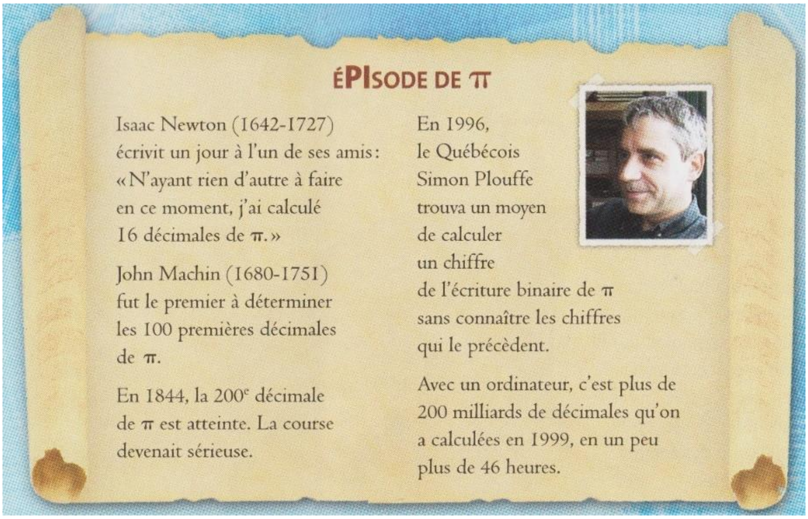
Tous ces calculs décrits sont empiriques. En pratique, on arrive à générer un nombre arbitraire de nombres premiers avec une croissance minimale de la suite. Les formules sont bien plus économes que celles Mills et Wright. À partir d'un nombre premier donné, on peut descendre jusqu'à 2 et à partir de 2 on peut obtenir une famille de suites infinies de nombres premiers.

Les records sont faits pour être battus, et avec un matériel informatique adéquat, et un certain temps de calcul, la suite de 100 nombres premiers peut être étendue jusqu'à 1000000 de chiffres. Mieux, lorsque l'exposant est 3/2, on conjecture que tous les nombres premiers peuvent être générés. Reste à le démontrer... ■

UN PROGRAMME MAISON

L'algorithme mis au point procède en trois étapes. D'abord, on choisit la valeur de départ a_0 et l'exposant α, préférablement une fraction simple. Puis on lance un algorithme qui associe la technique de Monte-Carlo (fondée sur des processus aléatoires) et le principe du recuit simulé. Ce principe est inspiré de la métallurgie où l'on alterne les cycles de refroidissement lent et de réchauffage (recuit) afin de minimiser l'énergie d'un matériau. Cette technique évite que l'écart entre chaque nombre premier ne croisse trop vite. Une fois quatre ou cinq valeurs trouvées, on passe à l'étape 3. On utilise une formule qui permet d'aller soit vers l'avant soit vers l'arrière. Vers l'avant, on cherche le plus petit nombre premier après $\{a_n^{\alpha}\}$. C'est assez facile en quelques minutes, même s'il a des milliers de chiffres, grâce à des logiciels, comme Maple ou PFGW. On rebrousse chemin pour vérifier que la formule fonctionne. Pour ce faire, on doit résoudre pour x avec x^{α}- S_{n+1}. Ici S_{n+1} est le prochain nombre premier candidat. C'est ici qu'un α rationnel facilite le calcul.

Pour LA SCIENCE Mai 2019



ÉPISODE DE π

Isaac Newton (1642-1727) écrivit un jour à l'un de ses amis : « N'ayant rien d'autre à faire en ce moment, j'ai calculé 16 décimales de π. »

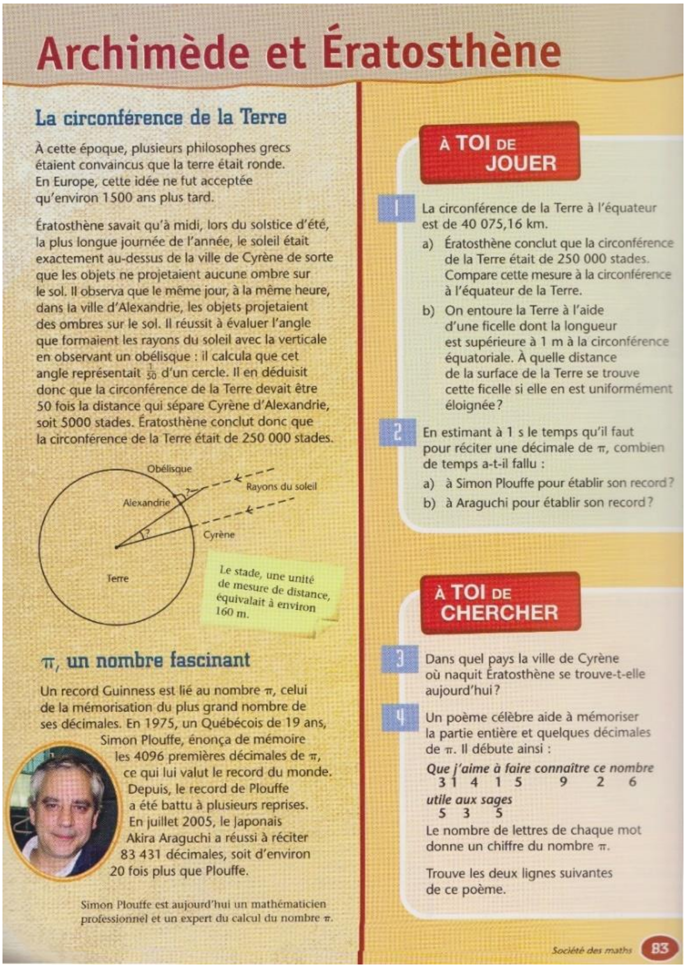
John Machin (1680-1751) fut le premier à déterminer les 100 premières décimales de π.

En 1844, la 200e décimale de π est atteinte. La course devenait sérieuse.

En 1996, le Québécois Simon Plouffe trouva un moyen de calculer un chiffre de l'écriture binaire de π sans connaître les chiffres qui le précèdent.

Avec un ordinateur, c'est plus de 200 milliards de décimales qu'on a calculées en 1999, en un peu plus de 46 heures.

Livre de mathématiques, niveau secondaire 2006 au Québec



Archimède et Ératosthène

La circonférence de la Terre

À cette époque, plusieurs philosophes grecs étaient convaincus que la terre était ronde. En Europe, cette idée ne fut acceptée qu'environ 1500 ans plus tard.

Ératosthène savait qu'à midi, lors du solstice d'été, la plus longue journée de l'année, le soleil était exactement au-dessus de la ville de Cyrène de sorte que les objets ne projetaient aucune ombre sur le sol. Il observa que le même jour, à la même heure, dans la ville d'Alexandrie, les objets projetaient des ombres sur le sol. Il réussit à évaluer l'angle que formaient les rayons du soleil avec la verticale en observant un obélisque : il calcula que cet angle représentait $\frac{1}{50}$ d'un cercle. Il en déduisit donc que la circonférence de la Terre devait être 50 fois la distance qui sépare Cyrène d'Alexandrie, soit 5000 stades. Ératosthène conclut donc que la circonférence de la Terre était de 250 000 stades.

Le stade, une unité de mesure de distance, équivalait à environ 160 m.

π, un nombre fascinant

Un record Guinness est lié au nombre π, celui de la mémorisation du plus grand nombre de ses décimales. En 1975, un Québécois de 19 ans, Simon Plouffe, énonça de mémoire les 4096 premières décimales de π, ce qui lui valut le record du monde. Depuis, le record de Plouffe a été battu à plusieurs reprises. En juillet 2005, le Japonais Akira Araguchi a réussi à réciter 83 431 décimales, soit d'environ 20 fois plus que Plouffe.

Simon Plouffe est aujourd'hui un mathématicien professionnel et un expert du calcul du nombre π.

À TOI DE JOUER

1. La circonférence de la Terre à l'équateur est de 40 075,16 km.
   a) Ératosthène conclut que la circonférence de la Terre était de 250 000 stades. Compare cette mesure à la circonférence à l'équateur de la Terre.
   b) On entoure la Terre à l'aide d'une ficelle dont la longueur est supérieure à 1 m à la circonférence équatoriale. À quelle distance de la surface de la Terre se trouve cette ficelle si elle en est uniformément éloignée ?

2. En estimant à 1 s le temps qu'il faut pour réciter une décimale de π, combien de temps a-t-il fallu :
   a) à Simon Plouffe pour établir son record ?
   b) à Araguchi pour établir son record ?

À TOI DE CHERCHER

3. Dans quel pays la ville de Cyrène où naquit Ératosthène se trouve-t-elle aujourd'hui ?

4. Un poème célèbre aide à mémoriser la partie entière et quelques décimales de π. Il débute ainsi :

   Que j'aime à faire connaître ce nombre
   3 1 4 1 5 9 2 6
   utile aux sages
   5 3 5

   Le nombre de lettres de chaque mot donne un chiffre du nombre π.

   Trouve les deux lignes suivantes de ce poème.

Société des maths 83

Livre de mathématiques, niveau secondaire 2006 au Québec

The Miraculous Bailey-Borwein-Plouffe Pi Algorithm

Steven Finch, Research and Development Team, MathSoft, Inc.

Overview: *10/1/95*

David Bailey, Peter Borwein and Simon Plouffe have recently computed the ten billionth digit in the hexadecimal expansion of pi. They utilized an astonishing formula:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8 \cdot n + 1} - \frac{2}{8 \cdot n + 4} - \frac{1}{8 \cdot n + 5} - \frac{1}{8 \cdot n + 6} \right) \cdot \left(\frac{1}{16} \right)^{n}$$

which enables one to calculate the dth digit of pi without being forced to calculate all the preceding d-1 digits. No one had previously even conjectured that such a ***digit-extraction*** algorithm for pi was possible. Click here to see the original CECM announcement and here to see a description for a non-technical audience. Bailey, Borwein and Plouffe discovered their formula using the PSLQ lattice reduction algorithm.

Site de MathSoft en 1996.

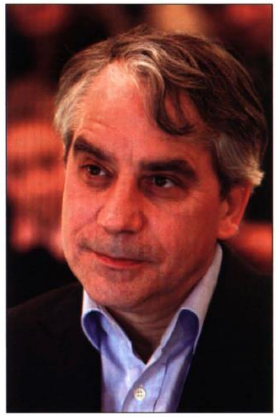
ACTIONS **Mathématiques expérimentales**

tapis de jeu le moins d'argent possible et donc d'aller droit au but.

Cet exemple d'expérimentation dans un dessein didactique n'en est qu'un parmi une multitude d'autres. L'idée n'est pas nouvelle et ne fait que reprendre en l'adaptant la proposition de créer des *Laboratoires de Mathématiques*, proposition défendue par Émile Borel en 1904, soutenue depuis par Jean Dieudonné à propos de l'enseignement de la géométrie et reprise de nombreuse fois en didactique des mathématiques.

L'ordinateur producteur de faits mathématiques

Un second type d'expérimentations mathématiques est celui où l'on demande à l'ordinateur de produire un grand nombre de «faits mathématiques» qu'on analyse ensuite jusqu'à y découvrir des régularités, qu'il sera peut-être possible de démontrer. C'est ainsi qu'un ami



Simon Plouffe.

cette méthode est celle que fit Simon Plouffe en 1995 de l'égalité :

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right).$$

Cette nouvelle formule de série pour π permet d'en calculer les chiffres binaires

Revue Tangente, juillet 2014

L'INDISPENSABLE NOMBRE π

→ ENTRETIEN

Simon Plouffe : « Les constantes résistent à toute classification »

Avec √5 et l'exponentielle, π est l'une des trois constantes qui hantent la théorie des nombres, la physique et la nature. Un des acteurs contemporains du calcul des décimales de π nous livre son regard sur la nature de ces constantes, et nous fait part de son désir de les classer comme Mendeleïev l'a fait pour les éléments.

D'où vient notre fascination pour le nombre π ?

SIMON PLOUFFE : Elle est directement liée à la présence du cercle dans nos cultures, π étant indissociable du cercle. Imaginez que vous alliez sur une île déserte ; vous êtes un esthète, un puriste qui collectionne les objets rares, et vous voulez emporter avec vous des planches à dessin sur lesquelles sont représentées les plus belles figures mathématiques. Il ne fait guère de doute que le cercle sera dans les toutes premières. D'une part, parce que c'est l'une des figures les plus simples. D'autre part, parce qu'il est omniprésent dans la nature : la Terre est ronde, le Soleil et la Lune le sont également. Le cercle est ainsi quelque chose d'évident. Il a d'ailleurs fallu de longs siècles pour le sortir du mysticisme et en faire un objet central des mathématiques.

Par ailleurs, il semble bien que les décimales de π apparaissent de façon aléatoire : ceux qui ont cherché des régularités dans la répartition des décimales n'ont rien trouvé, même avec des tests statistiques très poussés. La répartition des décimales est un mur d'incompréhension qu'on ne percera jamais.

Ailleurs qu'en géométrie, où trouve-t-on π ?

SIMON PLOUFFE : Essentiellement en théorie des nombres. Beaucoup de fonctions arithmétiques ont des moyennes qui sont liées au nombre π. Par exemple, le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné est lié à π. On retrouve π aussi en probabilités : celle que deux nombres entiers tirés au hasard soient premiers entre eux est de $6/\pi^2$. Ce ne sont que quelques exemples parmi d'autres : on retrouve encore π lorsque l'on considère le théorème de Fermat, ou dans les équations de physique, en électricité, en électromagnétisme, et même dans la théorie de la relativité. Moi-même, j'ai commencé à m'intéresser à π et aux constantes quand je voulais faire de la physique et que je me suis penché sur le principe d'incertitude de Heisenberg. On retrouve π dans toutes les théories mais c'est tellement banal qu'on ne le remarque même plus.

Connaître une multitude de décimales de π sert-il à quelque chose ?

SIMON PLOUFFE : Les Égyptiens utilisaient π sans vraiment

© MATHIEU NOWAK

Simon Plouffe, détenteur en 1975 du record du nombre de décimales mémorisées, a co-inventé en 1995 la formule « BBP » (des noms de David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe), qui permet de calculer en base 2 une décimale quelconque de π sans calculer celles qui précèdent. Par la suite, il a répertorié pas moins de 200 millions de constantes mathématiques (voir http://pi.lacim.uqam.ca/). Il a aussi publié un ouvrage de référence sur les suites, *Encyclopedia of Integer Sequences*, avec Neil Sloane, des laboratoires AT&T. Il est aujourd'hui ingénieur système, consultant pour une société d'informatique, à Lyon. simon.plouffe@sympatico.ca

Revue La Recherche, déc. 2005

SCIENCENEWSONLINE

IVARS PETERSON'S

MATHTREK

Recently on MathTrek:

The Limits of Mathematics -- 2/21/98

The Counterfeit Coin -- 2/14/98

Nine Primes in a Row -- 2/7/98

February 28, 1998

Pick a Digit, Any Digit

One of the most amazing mathematical results of the last few years was the discovery of a surprisingly simple formula for computing digits of the number pi. Unlike previously known methods, this one allows you to calculate isolated digits—without computing and keeping track of all the preceding numbers.

"No one had previously even conjectured that such a digit-extraction algorithm for pi was possible," says Steven Finch of MathSoft, Inc. in Cambridge, Mass.

The only catch is that the formula works for hexadecimal (base 16) or binary digits but not for decimal digits. Thus, it's possible to determine that the 40 billionth binary digit of pi is 1, followed by 00100100001110. . . . However, there's no way to convert these numbers into decimal form without knowing all the binary digits that come before the given string.

In hexadecimal form, the number pi is written as 3.243F6A8885A308D313198A2E0. . . , where the letters stand in for the hexadecimal equivalent of the base-10 numbers 10 (A), 11 (B), 12 (C), 13 (D), 14 (E), and 15 (F). It's straightforward to convert a hexadecimal expression into binary form but not into decimal form.

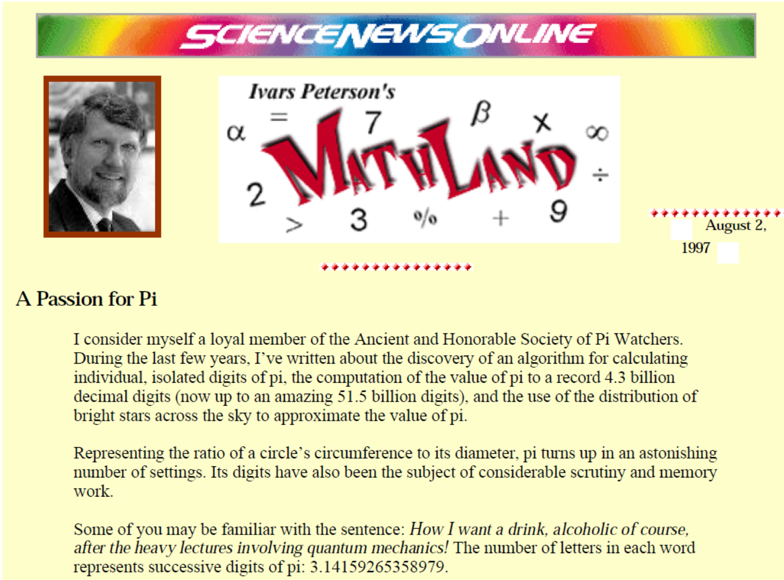
The novel scheme for computing individual hexadecimal digits of pi was found by David H. Bailey of the NASA Ames Research Center in Mountain View, Calif., Peter B. Borwein of Simon Fraser University in Burnaby, British Columbia, and Simon M. Plouffe, now at the University of Quebec in Montreal.

The method is based on the following new formula for pi:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

Computing individual hexadecimal digits using that formula relies on a venerable technique known as the binary algorithm for exponentiation. Bailey, Borwein, and Plouffe provide

MathTrek, Février 1998


SCIENCE NEWS ONLINE

Ivars Peterson's MathLand

August 2, 1997

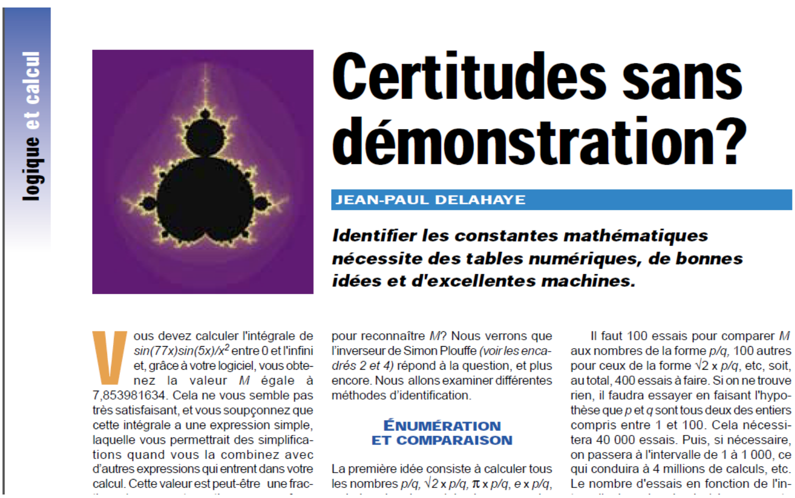
A Passion for Pi

I consider myself a loyal member of the Ancient and Honorable Society of Pi Watchers. During the last few years, I've written about the discovery of an algorithm for calculating individual, isolated digits of pi, the computation of the value of pi to a record 4.3 billion decimal digits (now up to an amazing 51.5 billion digits), and the use of the distribution of bright stars across the sky to approximate the value of pi.

Representing the ratio of a circle's circumference to its diameter, pi turns up in an astonishing number of settings. Its digits have also been the subject of considerable scrutiny and memory work.

Some of you may be familiar with the sentence: *How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics!* The number of letters in each word represents successive digits of pi: 3.14159265358979.

MathLand, 2 Aout 1997


logique et calcul

Certitudes sans démonstration?

JEAN-PAUL DELAHAYE

Identifier les constantes mathématiques nécessite des tables numériques, de bonnes idées et d'excellentes machines.

Vous devez calculer l'intégrale de $sin(77x)sin(5x)/x^2$ entre 0 et l'infini et, grâce à votre logiciel, vous obtenez la valeur *M* égale à 7,853981634. Cela ne vous semble pas très satisfaisant, et vous soupçonnez que cette intégrale a une expression simple, laquelle vous permettrait des simplifications quand vous la combinez avec d'autres expressions qui entrent dans votre calcul. Cette valeur est peut-être une frac-

pour reconnaître *M*? Nous verrons que l'inverseur de Simon Plouffe *(voir les encadrés 2 et 4)* répond à la question, et plus encore. Nous allons examiner différentes méthodes d'identification.

ÉNUMÉRATION ET COMPARAISON

La première idée consiste à calculer tous les nombres *p/q*, $\sqrt{2}$ x *p/q*, π x *p/q*, *e* x *p/q*,

Il faut 100 essais pour comparer *M* aux nombres de la forme *p/q*, 100 autres pour ceux de la forme $\sqrt{2}$ x *p/q*, etc, soit, au total, 400 essais à faire. Si on ne trouve rien, il faudra essayer en faisant l'hypothèse que *p* et *q* sont tous deux des entiers compris entre 1 et 100. Cela nécessitera 40 000 essais. Puis, si nécessaire, on passera à l'intervalle de 1 à 1 000, ce qui conduira à 4 millions de calculs, etc. Le nombre d'essais en fonction de l'in-

Pour La Science, Jean-Paul Delahaye

TABLEAU D'HONNEUR

SIMON PLOUFFE REÇOIT LE PRIX RECONNAISSANCE UQAM

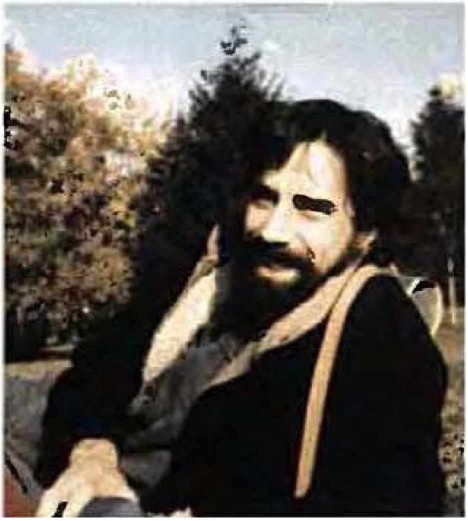
Simon Plouffe, diplômé de la maîtrise en mathématiques

Mathématicien et chercheur indépendant, il est certainement, parmi les diplômés de l'UQAM, un de ceux qui est le plus référencés sur le Web. Membre collaborateur du LACIM (Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique) de l'UQAM, **Simon Plouffe** a complété une maîtrise en mathématiques en 1992, sous la direction des professeurs **François Bergeron** et **Gilbert Labelle** du Département de mathématiques. Il a exercé, dans plusieurs compagnies informatiques, le métier d'analyste et c'est toujours là son travail officiel. Mais la nuit et dans ses temps libres, sa véritable passion, c'est l'exploration des propriétés fines des nombres.

Selon le professeur **Christophe Reutenauer**, directeur du LACIM et titulaire d'une Chaire de recherche du Canada en algèbre combinatoire et informatique mathématique, Simon Plouffe s'est acquis une notoriété internationale indéniable pour ses recherches et réalisations dans un domaine surprenant: l'utilisation de l'ordinateur pour "craquer" des nombres réels, des suites d'entiers, et même des constantes physiques ("craquer" signifie ici déterminer l'objet par une formule simple). De poursuivre

Prix Reconnaissance UQAM 2004

Simon Plouffe, un grand connaisseur de π



La passion que Simon Plouffe éprouve pour $\boldsymbol{\pi}$ n'est pas nouvelle. En 1975 il avait réussi à mémoriser 4096 décimales de π (le record actuel est de plus de 67 000). Il figurait à ce titre dans le *Livre Guinness des records.* Il est amusant que, 20 ans après, il ait participé à une découverte de premier ordre concernant π.

S. Plouffe raconte que, pour mémoriser les décimales de π, il les prenait par groupes de 100, les écrivait plusieurs fois et réussissait ainsi à les connaître grâce à sa mémoire photographique des chiffres. Pour ne pas oublier tous les chiffres appris, il devait régulièrement s'isoler dans le noir

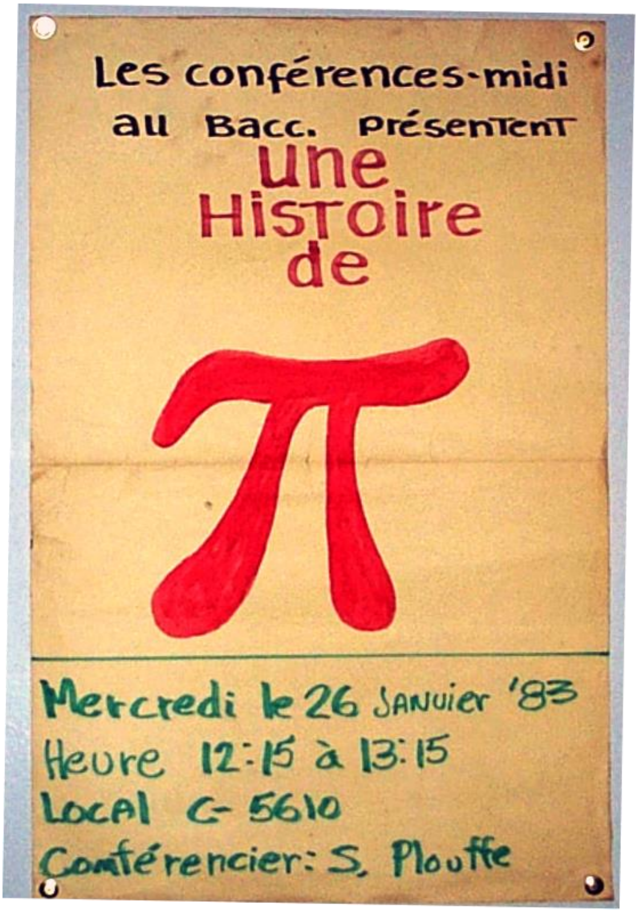
et les réciter. Après son record de 4 096 chiffres, il réussit à atteindre 4400 chiffres et décida alors de s'arrêter. Même avec la meilleure volonté du monde, rares sont ceux qui peuvent réussir de tels exploits : il faut une connivence particulière avec les chiffres qui n'est pas sans rappeler celle des calculateurs prodiges du siècle dernier, ou celle qu'Euler et Ramanujan possédaient de toute évidence.

Le fascinant nombre π, 1997 (Jean-Paul Delahaye)

Le prix Reconnaissance UQAM en 2004

La question était : est-ce que je le garde pour le mettre dans le jardin pour faire peur aux oiseaux ou bien si je le mets dans la poubelle pour le recyclage du plastique ? Je l'ai pris en photo et j'ai opté pour la 2ème option.

Avec mon clavecin, 1981.



Ma première vraie conférence au module de mathématiques à l'UQAM, 1983

Pi de Yves Chiricota, 1995

Formulaire

$$P_0 = b - 1 \qquad P_1 = (1-b)\left[\frac{p}{b}\right] - b + p + 1 \qquad 1979$$

$$e^{\pi} - \pi = 19.999099979189\ldots \qquad 1987$$

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) \qquad 1995$$

$$\zeta(3) = 28\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{\pi n}-1)} - 37\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{2\pi n}-1)} + 7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{4\pi n}-1)} \qquad 1998$$

$$\frac{1}{\pi} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{\pi n}-1} - 40\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1} + 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{4\pi n}-1} \qquad 2006$$

$$\pi = 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{\pi n}-1} - 96\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{2\pi n}-1} + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{4\pi n}-1} \qquad 2006$$

$$\zeta(5) = 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{\pi n}-1)} - \frac{259}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{2\pi n}-1)} - \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{4\pi n}-1)}$$ 2006

$$K = 11\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(cosh(\pi n)-1)} - \frac{71}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(cosh(2\pi n)-1)} + 11\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(cosh(4\pi n)-1)}$$ 2006

K est la constante de Catalan,
0.91596559417721...

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{2\pi n/7}-1} = 10.00000000000000190161767888663\ldots$$ 2011

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{2\pi n/13}-1} \cong 119.00000000000000000000000000000095$$ 2011

$$691 = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{11}}{e^{\pi n} - 1} - 65536 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{11}}{e^{4\pi n} - 1} \qquad 2014$$

$$17 = 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{7}}{e^{\pi n} - 1} - 8192 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{7}}{e^{4\pi n} - 1} \qquad 2014$$

$$\frac{M_n}{M_p} \approx \frac{8}{27}\left(\frac{5}{\cos\left(\frac{\pi}{15}\right)} - \sqrt{3}\right) = 1.0013784197796352 80\ldots \qquad 2009$$

$$\frac{M_n}{M_e} \approx \frac{1}{5\cosh(\pi)} + 6\,\pi^5 + \frac{1}{5\sinh(\pi)} = 1836.15267996686153\ldots \qquad 2010$$

$$f(n) = 1 + \frac{\sqrt[4]{16^{4n} + 1}}{16^{\mathrm{n}} + 1} \qquad 2014$$

$$p_n + \pi(n) \approx -nW_{-1}\left(\frac{-e}{n}\right)c(n) \qquad 2020$$

$$A000266(n) = \frac{2^{-[\frac{n}{2}]} n!\,[\frac{1}{2} + 2^{[\frac{n}{2}]}[\frac{n}{2}]!]}{[\frac{n}{2}]!} \qquad 1993$$

$$A000168(x) = \frac{-1 + 18x + \sqrt{-(-1 + 12x)^3}}{54x^2} \qquad 1993$$

$$A000257(x) = \frac{2 + 6\sqrt{1 - 8x}}{(1 + \sqrt{1 - 8x})^3} \qquad 1993$$

$$A000287(x) = \frac{4x^5 + (1 + x)(-1 + (1 - 4x)^{3/2} + 6x - 6x^2 - 4}{2x^5(1 + x)(2 + x)^3} \qquad 1993$$

$$A006848(x) = \frac{(1+x)^{1/4} e^{\frac{x(x^3+2x^2-x-3)}{2(x-1)(x+1)}}}{(x-1)^{1/4}} \qquad 1992$$

$$A002477(x) = \frac{x(1+10x)}{(1-100x)(1-10x)(1-x)} \qquad 1990$$

$$A000073(n+1)$$
$$= \left\lfloor \frac{3(586+102\sqrt{33})^{1/3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(19-3\sqrt{33})^{1/3}+\frac{1}{3}}{4-2(586+102\sqrt{33})^{1/3}+(586+10} \right. \qquad 1993$$

$$F(n) = \{ r^{2^n} + 1 \} \qquad 2020$$

$\{cn^{1001}\}$ donne 104 nombres premiers 2020

$$\pi \approx \left(\frac{2n!}{B_n 2^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\pi \approx \left(\frac{(2n)!2^{2n+2}}{E_{2n}}\left(1-\frac{1}{3^{2n+1}}\right)\right)^{1/(2n+1)} \qquad 2022$$

Extreme points of set of n x n symmetric doubly-stochastic matrices

Réf. JCT 8 422 70. EJC 1 180 80.

HIS2 A6847 Dérivée logarithmique Suite P-récurrente

HIS1 exponentielle (algébrique)

a(n) = n^3 a(n - 1) + (4 n^3 - 4 n^2 + n) a(n - 2)+
(- 3 n^3 + 5/2 n^2 - 1/2 n) a(n - 3)
+ (24 n^3 - 26 n^2 + 9 n - 1) a(n - 4)

```
           1/4
    (z + 1)     exp(1/2 z (z + 1))
   --------------------------------
                      1/4
               (z - 1)
```

1, 1, 2, 5, 14, 58, 238, 1516, 9020, 79892, 635984, 7127764, 70757968, 949723600, 11260506056, 175400319992, 2416123951952, 42776273847184, 671238787733920

Exemple de formule trouvée, la dernière du mémoire de maîtrise en 1992 (sur 1031)

Ici en plus propre

$$\frac{(1+x)^{1/4}e^{x(x+1)/2}}{(1-x)^{1/4}}$$